

En un món diferent del nostre, existeixen unes criaturetes que estic segur que no coneix cap de vosaltres. Es coneixen com nims. Els nims són criatures màgiques. Encara que en el vostre món no sigui possible la màgia, en el món dels nims és d'allò més habitual. Ara bé, ells tenen una norma: no utilitzar màgia per a la feina, saben com d'important és que la ment i el cos treballin. Aquesta història tracta sobre dos nims i de com un d'ells farà descobrir a l'altre la relació entre dos mons aparentment separats: matemàtiques i metalls.

A la farga d'en Raz, el so dels martells picant el metall calent era una delícia auditiva, en lloc d'un so estrident i molest se sentia més com a música. La major passió d'en Raz era treballar el metall. Els nims sempre senten passió per alguna cosa. Quan descobreixen quina o quines són, desenvolupen de sobte un gran amor per allò i no ho abandonen mai. Per això sempre trobareu un nim feliç, perquè tots tenen una passió que els omple el cor. I és ben possible que un nim en tingui més d'una, aleshores o bé les combina, o bé abandona una.

Tornant a la farga d'en Raz, mentre el so dels martells sonava amb harmonia pitagòrica, el fill d'en Raz, anomenat Zan, va entrar. Havia tornat de l'escola.

—Hola, fill. Com han anat les classes? —preguntà en Raz, mentre deixava de picar per parlar amb el seu fill. Tenia una veu força ronca.

—Bé, com sempre —en Zan es va deixar caure en una cadira —. Com ha anat avui a la farga?

—Genial! Un altre matí inoblidable: metall per treballar i jo durant unes quantes hores. Ai, com m'agrada el metall! —va exclamar en Raz, li brillaven els ulls.

—Ostres, quina enveja! Jo també volia quedar-me tot el matí treballant el metall amb tu, pare! Jo no vull passar-me el dia assistint a classes avorrides, jo vull quedar-me aquí amb tu a la farga i gaudir junts dels metalls —va remugar el fill d'en Raz.

—Em fa molt feliç que comparteixis la passió del teu vell pare pels metalls, però ja saps que és important que hi vagis, necessites adquirir els coneixements bàsics per a la vida.

—Ho sé. Tanmateix, com tu has dit, la meva passió són els metalls, i estic desitjant acabar ja per poder-m'hi dedicar a temps complet —confessà engrescat en Zan.

—Però pel que sé no són la teva única passió. També t’apassionen les matemàtiques, no?

—Sí, les matemàtiques també m’encanten! Però és clar, no puc barrejar de cap manera matemàtiques i metalls, així que em quedaré amb els metalls.

—Estàs segur que no pots treballar en els dos?

—Diria que no, o almenys no se m’acudeix cap forma de combinar-los.

— I el teu professor de Matemàtiques, en Nak? No t’intenta convèncer perquè també et dediquis a les matemàtiques?

—Sí, però jo ja li he dit que preferentment em dedicaré als metalls.

En Raz es va quedar pensatiu, amb la mirada al buit.

—En fi, dinaré, descansaré i a la tarda ja em dedicaré a treballar els meus estimats metalls —pronuncià finalment en Zan.

Tal com havia dit, en Zan va dinar i va fer una migdiada i tot seguit va començar a treballar a la farga. Mentre fonia el metall, en Zan es va adonar que el seu pare no hi era. “Que estrany, em pensava que a ell també li vindria de gust passar-se la tarda a la farga. En fi, deu tenir assumptes que requereixen de la seva presència”. I tot seguit va procedir a colar el metall fos.

Si bé és cert que els nims senten un gran amor per les seves passions, el prioritari per a ells sempre és la família. I en Raz, com bon nim, havia sacrificat una tarda a la farga per anar a buscar a qui ell creia que podria convèncer en Zan.

Havia passat ja una setmana. En Zan avui també pensava passar-se tota la tarda a la farga, però quan va entrar-hi, va notar la presència d’algú, però com que a la tarda normalment el lloc estava fosc no aconseguia distingir-lo de primeres.

—Hola, Zan —digué aquell personatge misteriós.

En Zan reconegué aquella veu: era la del seu professor de Matemàtiques, en Nak.

—Què fas a la meva farga? —preguntà en Zan consternat, mentre llançava un petit sol dels seus dits per il·luminar l’estança.

—Mostrar-te que les matemàtiques i els metalls estan molt relacionades i que no cal que renunciïs a una —i havent dit això, en Nak va abaixar força la lluminositat del petit sol que havia creat en Zan —. Per mostrar-t’ho, necessito que no hi hagi gaire llum.

En Zan va notar que davant d’en Nak hi havia tres blocs, cadascun d’ells tenia un rectangle diferent en relleu enfonsat:



—Veig que ja t’has adonat dels blocs. Cadascun d’ells és d’un metall diferent. El que té gravat el rectangle més curt és d’or, el del mig és de plata i el que té el rectangle més llarg és de bronze. Zan, ja sé que penses que les matemàtiques i els metalls són dos mons completament diferents, però et mostraré que no és així. Les matemàtiques saben com d’importants són els metalls, és per això que els fan un homenatge propi.

En Zan va quedar captivat per les paraules del seu professor.

—Zan, deixa’m parlar-te dels *nombres metàl·lics*.

A continuació, en Nak va agafar la cullera de fonedor la qual contenia metall fos i en va abocar una mica a cadascun dels rectangles i va deixar que s’escampés fins que va omplir tots els segments d’aquests. Ara brillaven amb un taronja intens.

—Comencem pel rectangle del bloc d’or, el *rectangle d’or*. Com pots veure, la base està dividida en dos segments. No són dos segments de longitud arbitrària, la divisió està feta de tal manera que la part més gran sigui a la part més petita el que el total és a la part més gran. Posem que la part gran mesura 1 i que el total mesura x .

En Nak va fer sortir el metall fos del rectangle d’or amb la seva màgia i amb uns quants moviments va fer que es comencés a ordenar i al final va quedar suspesa en l’aire, brillant amb un taronja intens, la igualtat:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-1}$$

—Si ho reorganitzem ens queda aquesta equació —i en Nak va tornar a fer un moviment de mans perquè el metall fos fes una altra figura:

$$x^2 - x - 1 = 0$$

—Si la resollem i ens quedem amb la solució positiva surt:

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

—Té un nom especial: el nombre d'or, φ —i aquesta última lletra també la dibuixà en Nak a l'aire.

—Això ja ho coneixia, Nak.

—M'ho imaginava, tothom coneix el nombre d'or. Tanmateix, coneixes el nombre de plata?

—Aquest no.

—No pateixis, de fet, em sorprendria que el coneguessis. Passem al següent rectangle —en Nak es va posar davant del bloc del mig, i tot el que havia escrit a l'aire s'havia quedat suspès sobre el bloc d'or.

—Aquest bloc és de plata, per tant, tenim el *rectangle de plata*. Aquí la base està dividida en tres segments. Dos grans que mesuren igual i un altre més petit. Aquí, el total és a algun dels dos segments grans el que un d'aquests és al segment petit. De nou, si el total és x i els segments grans mesuren 1, tenim:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-2}$$

—Reordenant, resolent i agafant la solució positiva surt:

$$x^2 - 2x - 1 = 0$$

$$x = 1 + \sqrt{2}$$

—Aquest és el nombre de plata, σ —en Nak va passar al bloc de bronze, i tot el que havia escrit del nombre de plata estava suspès sobre el bloc de plata.

—Si no coneixes el nombre de plata, menys m'imagino que coneixeràs el de bronze.

—Exacte, aquest tampoc el conec.

—Doncs mira, aquest és el *rectangle de bronze*. I aquí, la base està dividida en quatre segments, tres de grans que mesuren igual i un altre de petit. El total és a un dels segments grans el que un dels segments grans és al segment petit. I un altre cop, si el total és x i els segments grans fan 1, queda:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x-3}$$
$$x^2 - 3x - 1 = 0$$
$$x = \frac{3+\sqrt{13}}{2}$$

—Aquest és el nombre de bronze, β —en Nak es va tornar a posicionar al centre; tot el que havia escrit surava a sobre del seu respectiu bloc —. Digue'm, Zan, quin patró observes en les equacions que han generat aquests tres nombres?

—Que el coeficient del terme lineal va decreixent una unitat: $-1, -2, -3\dots$

—Doncs aquí ho tens. Un nombre metàl·lic és la solució positiva d'equacions quadràtiques de la forma $x^2 - kx - 1 = 0$, on k és un nombre natural. Si fem $k = 1$ surt l'equació del nombre d'or, si fem $k = 2$ surt la del nombre de plata, i així successivament. I ara respon: com obtindries una fórmula general per obtenir qualsevol nombre metàl·lic només a partir de substituir k per un nombre natural?

—Doncs suposo que aplicant la fórmula general de l'equació de segon grau a l'equació general i quedant-nos amb la solució positiva.

En Nak va fer un nou moviment de mans i va fer que les tres escriptures de metall fos que suraven separades s'ajuntessin al centre perquè, unificades, escrivissin:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-k) \pm \sqrt{(-k)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1}$$
$$x = \frac{k + \sqrt{k^2 + 4}}{2}$$

—Efectivament —respongué en Nak.

—Fascinant... —en Zan començava a respirar lentament, es notava que li estava encantant aquella lliçó tan peculiar del seu professor.

—I ara et vull mostrar un últim aspecte d'aquests nombres: les successions metàl·liques. Et sona la successió 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21..., oi?

—Sí.

—Saps quina és la fórmula que la descriu?

—Cada terme és la suma dels dos anteriors —i en Zan va fer un moviment de mans igual que el del seu mestre i va deixar escrit a l'aire amb el metall fos:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$$

—I digue'm, Zan, saps quina relació guarda aquesta successió amb el nombre d'or?

—La divisió entre dos termes consecutius cada cop s'hi apropa més.

—I com ho demostres?

—Hm, ara no se m'acudeix com.

—És evident que haurem de calcular aquest límit, no?:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}}$$

—Sí, en això hi queia, però a partir d'aquí no sé com...

—Tenim la relació de recurrència d'abans, no?

—Ostres, és clar, la podem aplicar, repartir denominadors i simplificar!

—Exactament:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_n}{F_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{F_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{F_{n-1}}{F_{n-1}} + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{F_{n-2}}{F_{n-1}} \right) = 1 + \frac{1}{L}$$

—I fixa't en la igualtat que ens queda, Zan:

$$L = 1 + \frac{1}{L}$$

—No m’ho diguis, ja ho veig: reorganitzant-la surt $L^2 - L - 1 = 0$, l’equació del nombre d’or!
I com que el límit és la incògnita, si s’agafa la solució positiva, surt que el límit és igual al nombre d’or!

—Molt ben deduït, alumne meu! —en Nak aplaudia i somreia amb orgull—. Tanmateix, ara considera aquesta altra successió, sabries trobar-ne la relació de recurrència?:

$$1, 2, 5, 12, 29\dots$$

—És possible que un terme s’obtingui fent el doble de l’anterior i sumant l’anterior d’aquest últim?

—Molt bé:

$$P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2}$$

—Ja em veig venir què vols fer ara: vols que calculem el límit de la raó entre dos termes consecutius d’aquesta nova sèrie, oi?

En Nak li va fer un gest amb la mà a en Zan volent dir “Tot teu”. En Zan va tornar a fer anar la seva màgia sobre el metall fos brillant i el va modelar per escriure:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{P_n}{P_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2P_{n-1} + P_{n-2}}{P_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2P_{n-1}}{P_{n-1}} + \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(2 + \frac{P_{n-2}}{P_{n-1}} \right) = 2 + \frac{1}{L}$$

—S’obté la igualtat $L = 2 + \frac{1}{L}$, que reorganitzada és $L^2 - 2L - 1 = 0$, l’equació del nombre de plata! Això vol dir que la raó entre dos termes consecutius d’aquesta successió tendeix al nombre de plata!

—Perfecte. I ara suposo que ja sabràs què fer amb la successió 1, 3, 10, 33, 109..., no?

—Pel que veig, aquesta successió té la següent relació de recurrència:

$$B_n = 3B_{n-1} + B_{n-2}$$

Per tant, calculant un límit anàleg als dos anteriors surt:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{B_n}{B_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3B_{n-1} + B_{n-2}}{B_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3B_{n-1}}{B_{n-1}} + \frac{B_{n-2}}{B_{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(3 + \frac{B_{n-2}}{B_{n-1}} \right) = 3 + \frac{1}{L}$$

Aquest cop tenim $L = 3 + \frac{1}{L}$, és a dir, $L^2 - 3L - 1 = 0$, la raó entre dos termes consecutius d'aquesta successió és el nombre de bronze!

—I per a qualsevol nombre metàl·lic com ho generalitzaries, Zan? Quina seria la fórmula general d'una successió metàl·lica?

—Observant les tres relacions de recurrència anteriors, noto que el nombre que multiplica el terme anterior del terme buscat és la k corresponent a cada nombre metàl·lic: per al nombre d'or ($k = 1$) es multiplica per 1, per al nombre de plata ($k = 2$) es multiplica per 2 i per al de bronze ($k = 3$), es multiplica per 3. De manera que, podria ser que la relació general fos

$$S_n = kS_{n-1} + S_{n-2}?$$

—Demostrea-ho —digué en Nak, amb un lleuger to desafiant.

—Suposo que n'hi haurà prou de calcular el límit del cas general:

$$L = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{S_n}{S_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{kS_{n-1} + S_{n-2}}{S_{n-1}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{kS_{n-1}}{S_{n-1}} + \frac{S_{n-2}}{S_{n-1}} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(k + \frac{S_{n-2}}{S_{n-1}} \right) = k + \frac{1}{L}$$

L'equació és $L = k + \frac{1}{L}$, que és $L^2 - kL - 1 = 0$, l'equació general d'un nombre metàl·lic!

Per tant, la relació de recurrència general és efectivament $S_n = kS_{n-1} + S_{n-2}$.

—Enhorabona, Zan. Aquí s'acaba tot el que et volia explicar.

—És realment fascinant, Nak. Em sento molt emocionat ara mateix.

—Veus com no calia que renunciessis a les matemàtiques? Geometria, àlgebra i anàlisi juntes per fer homenatge als metalls. Oi que és bonic?

—És preciós. Tinc moltes ganes de posar-me a investigar més en matemàtiques al mateix temps que pico metall.

—Ara m'agrades. Doncs perquè tinguis un punt de partida en les teves investigacions, et proposo això perquè comencis: demostra que tots els nombres metàl·lics són irracionals.

Lema: matemàtiques metàl·liques