Problemes a l'esprint per a equips de batxillerat

Activitat telemàtica de resolució de problemes per equips amb una tasca personal i col·laborativa

Dimecres, 4 de febrer de 2026



Societat Catalana de Matemàtiques

feemcat

amb la col·laboració del mmaca

i el suport de CREAMAT APOTEMA

Per a començar l'activitat cal que cada equip hagi formalitzat la inscripció i aleshores haurà rebut una contrasenya de 9 caràcters amb l'estructura

lletra lletra xifra xifra xifra xifra lletra xifra xifra

- *Els dos nombres de dues xifres formats el primer per les xifres del 3r i 4t caràcter de la contrasenya (indicades en verd) i el segon per les xifres del 5è i 6è caràcter de la contrasenya (indicades en roig) serveixen com a dades per al problema 2.*
- *Les dues darreres xifres (indicades en blau) són dades per al problema 6.*

Primer grup de problemes (1, 2, 3 i 4)

1. 2026 persones havien de pagar cadascuna 5€ per a l'entrada a una activitat, però algunes només portaven 4€ i se'ls va acceptar. Resulta que el total de diners ingressat és un múltiple de 2025. Quantes persones són les que han posat només 4 €?

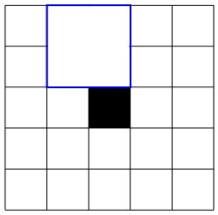
La resposta del problema 1 passa al problema 7 com a nombre M

---

2. Aquest problema depèn de la contrasenya. A és el nombre de dues xifres ***xifra xifra*** format pel tercer i el quart caràcters de la contrasenya. B és el nombre de dues xifres ***xifra xifra*** format pel cinquè i el sisè caràcters de la contrasenya. Hem escrit 9 nombres ordenats del més petit a més gran. El nombre del mig resulta ser la mitjana aritmètica dels 9 nombres. Si la mitjana dels 5 nombres més petits és A i la dels 5 més grans B, quin és el valor de la suma dels 9 nombres.

---

3. Ve un número Q del problema 5. Recordeu que és la suma de les xifres de la resposta.

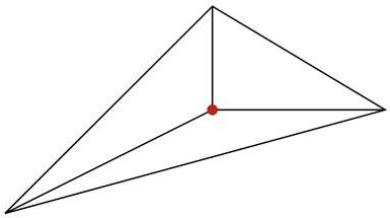


Si pintem de negre el quadret central d'una quadrícula blanca 5 x 5 , en aquesta quadrícula hi podem trobar 12 quadrats blancs de mida 2 x 2 que no contenen el quadret negre; un d'ells està indicat en el dibuix.

Quants quadrats blancs de mida 4 x 4 podrem trobar en una quadrícula blanca Q x Q en la qual hem pintat de negre el quadrat central?

---

4. La figura representa una piràmide que en podem dir "trirectangular". Les tres cares que tenen en comú el vèrtex remarcat són triangles rectangles, amb l'angle recte en el vèrtex indicat. Aquestes cares tenen àrees respectives 5 cm^2, 9 cm^2 i 10 cm^2.



Calculeu el volum de la piràmide, expressat en cm^3 .

La resposta del problema 4 passa al problema 9 com a nombre S.

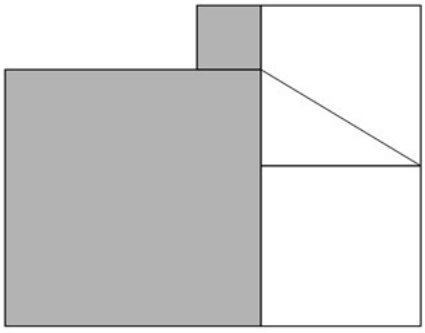
Segon grup de problemes (5, 6, 7 i 8)

5. Un nombre natural N té exactament 12 divisors positius, inclosos ell mateix i l'1, i la suma dels seus divisors primers (factors primers diferents en la seva descomposició) és 15. Quin és el nombre N més petit que compleix aquest enunciat?

La suma de les xifres de la resposta passa al problema 3 com a valor Q

---

6. Aquest problema depèn de la contrasenya. Les dues darreres xifres formen el nombre h que és una dada per al problema.



En la figura es mostren quatre quadrats adossats. A dins d'un dels quadrats blancs s'ha dibuixat un triangle rectangle, la hipotenusa del qual té una longitud de h cm.

Quina és la mesura, en cm^2, de l'àrea grisa?

---

7. M, dada per a aquest problema, és la resposta del problema 1.
   L'Alba té dues monedes iguals "amb trampa", en què la probabilitat de treure cara és $3/M$. En Bernat té tres monedes perfectament equilibrades. Si cadascú tira les seves monedes, quina és la probabilitat que l'Alba tregui més cares que en Bernat?

8.- Volem suprimir un factorial, i només un, del producte

$$1!\cdot 2!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 5!\cdot 6!\cdot 7!\cdot 8!\cdot 9!\cdot 10!\cdot 11!\cdot 12!$$

de manera que el resultat del producte sigui un quadrat perfecte.
Quin factorial hem de suprimir?

- Si creieu que no és possible fer el que es demana, en el formulari heu de contestar *No pot ser*, altrament el nombre que defineix el factorial.

D'aquest problema passa una dada, T, al problema 9.

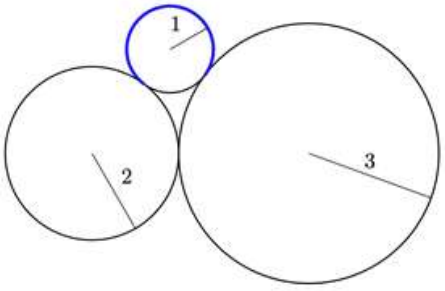
- Si creieu que no és possible el que es demana, passeu $T = 40$.
- Si la resposta és f (és a dir que cal eliminar $f!$) passeu $T = 40 + f$.

Reptes finals (9 i 10)

9- Venen dues dades: del problema 4, un nombre S, i del problema 8, T.
Es van fer les eleccions a Verduralàndia i un dels partits que es presentava era el PMB (*Partit dels menjadors de bròquil*). Se sap que totes les persones que van votar el partit PMB realment havien menjat bròquil, però també n'havien menjat el $S\%$ de persones que van votar altres partits. Així resulta que exactament el $T\%$ de la totalitat de les persones que van votar havien menjat bròquil. Quin tant per cent de vots va tenir el partit PMB en les eleccions?

---

10. Tres circumferències de radis 1, 2 i 3 són tangents dues a dues, com mostra la figura. Quina és la longitud de l'arc de la circumferència de radi 1 que uneix els punts de tangència amb les altres circumferències (remarcat a la figura en blau)?



La resposta és igual a π multiplicat per una fracció racional. Al formulari de resposta es demana aquesta fracció racional, simplificada al màxim.

Problemes de propina

(en principi pensats **per quan s'hagi tingut encert en els 10 problemes** "principals")

Propina 1.

Si a, b, c són nombres enters positius que compleixen

$$a \cdot b \cdot c + a \cdot b + a \cdot c + b \cdot c + a + b + c = 104,$$

aleshores quin és el valor de $a^2 + b^2 + c^2$?

Propina 2.

En un triangle rectangle de costats 5 cm, 12 cm i 13 cm es considera un punt P que està a una distància de 1 cm del catet més llarg i també a 1 cm de la hipotenusa. Des d'aquest punt tracem perpendiculars als dos catets i així es dibuixa un rectangle. Quina és l'àrea d'aquest rectangle?

Propina 3.

En un concurs es proposen cinc problemes. Tots es puntuen amb un nombre enter positiu, però cadascun d'ells té un valor diferent dels altres. La Maria ha fet bé els cinc problemes i ha tingut 10 punts per la suma de les puntuacions dels **dos** problemes amb menys puntuació i 18 punts per la suma dels **dos** problemes amb més puntuació. Quants punts ha obtingut en total la Maria en el concurs?
