

Contribució a la Geometria Diferencial de J.B. Meusnier de la Place



Agustí Reventós Tarrida

Contribució a la Geometria Diferencial de J.B. Meusnier de la Place

L'edició d'aquesta obra ha estat a cura de Joaquim Bruna

@ Agustí Reventós

@ Societat Catalana de Matemàtiques, filial de l'Institut d'Estudis Catalans, carrer del Carme, 47, 08001 Barcelona.



Aquesta obra és d'ús lliure, però està sotmesa a les condicions de la llicència pública *Creative Commons*. Es pot reproduir, distribuir i comunicar l'obra sempre que se'n reconegui l'autoria i l'entitat que la publica i no se'n faci un ús comercial ni cap obra derivada. Es pot trobar una còpia completa dels termes d'aquesta llicència a l'adreça <https://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>

Contribució a la Geometria Diferencial
de
J.B. Meusnier de la Place

Agustí Reventós
Professor Emèrit, Departament de Matemàtiques
Universitat Autònoma de Barcelona
08193 Cerdanyola del Vallès, Bellaterra.

Jean-Baptiste Meusnier de la Place (1754-1793)

Breu nota sobre la vida i obra de Jean-Baptiste Meusnier¹

Neix a Tours el 19 de juny de 1754. L'any 1771 és enviat a París, a la pensió Berthaud, on es preparaven els joves que volien ingressar a l'École Royale du Génie Militaire de Mézières. No supera els exàmens de 1772; el 1773 no s'hi van fer proves, però, a proposta dels examinadors, es va fer una excepció amb Meusnier, i consta que l'1 de gener de 1774 va ser nomenat segon lloctinent com a alumne d'aquesta escola. Allà és rebut per Monge.



École du Génie a Charleville-Mézières

¹La font principal per redactar aquesta secció ha estat el discurs que Gaston Darboux va pronunciar a l'Acadèmia (Académie des Sciences) el 20 de desembre de 1909, titulat *Notice Historique sur le Général Meusnier*, que podeu trobar als *Éloges* de Darboux, [2], p. 218–262. També ha estat de gran ajuda l'estudiosa de Meusnier i professora de Química Josette Fournier [4], així com l'exposició de l'enginyer Serge Le Pottier [8].

Reproduïm les paraules de Monge sobre Meusnier²:

“El mateix dia de la seva arribada a Mézières, em va venir a veure i em va demanar que li proposés una qüestió que em permetés valorar el seu grau d’instrucció i jutjar la seva capacitat. Per satisfer-lo, li vaig parlar de la teoria d’Euler sobre els radis de curvatura màxim i mínim de les superfícies corbes. Li vaig exposar els resultats principals i li vaig demanar que en trobés la demostració. L’endemà al matí, a les meves habitacions, em va portar un petit paper amb aquesta demostració; però el que era realment remarcable és que les consideracions que ell havia fet servir eren més directes i el camí seguit molt més ràpid que el d’Euler. L’elegància d’aquesta solució, i el poc temps que li havia costat trobar-la, em van donar una idea de la seva sagacitat i d’aquell sentiment exquisit per la natura de les coses que ha manifestat en tots els treballs que ha emprès posteriorment. Li vaig indicar llavors el volum de l’Acadèmia de Berlín on es troba la memòria d’Euler sobre aquest tema; i ell, en reconèixer de seguida que els mitjans que havia utilitzat eren més directes que els del seu model, va entendre que també havien de ser més fructífers, i va arribar a resultats que se li havien escapat a Euler.”

En aquella època, Monge intentava resoldre les equacions en derivades parcials que descriuen les superfícies d’àrea mínima amb una vora donada. No ho va aconseguir fins deu anys més tard, però, mentrestant, Meusnier, aplicant el seu nou punt de vista, ja va descobrir dues superfícies d’àrea mínima: la catenoide i l’helicoides recte. Concretament, demostrà que l’única superfície de revolució d’àrea mínima és la generada per la revolució d’una catenària al voltant d’un eix paral·lel a la tangent de la catenària en el seu punt més baix; i que, d’entre totes les superfícies generades per una recta que es mou paral·lelament a un pla donat, l’única amb àrea mínima és l’helicoides recte (superfície d’un cargol de rosca quadrada³). Aquests resultats els exposà els dies 14 i 21 de febrer de 1776 a l’Acadèmia, i estan recollits en la seva famosa memòria *Sur la courbure des surfaces* [10], que no es publicà fins al 1785. Reproduïm aquesta memòria a la secció .

²Vegeu [2], pàgina III. Aquest text també apareix a [16], p. 234.

³Rosca quadrada fa referència al fet que la secció transversal del cargol és un quadrat, de fet en general serà un rectangle.

El 25 de desembre de 1775, Meusnier abandona l'Escola d'Enginyers de Mézières amb el títol d'enginyer. Posteriorment, fou professor de geometria descriptiva a la mateixa escola.

L'1 de gener de 1776 va ser destinat a les Ardenes, a Charlemont i a Givet, com a enginyer del Rei.

Després d'un informe favorable de Condorcet i Bossut, comissaris nomenats per l'Acadèmia, Meusnier va ser admès com a membre d'aquesta institució quan encara no tenia 22 anys. Li fou assignat com a tutor Vandermonde, amb qui sempre mantingué una bona relació.

Ja el mateix 1776, dirigí la publicació de l'Acadèmia *Machines approuvées par l'Académie*.



Portrait présumé du Général Meusnier de La Place, bibliothèque municipale de Tours.

Gentilesa de Josette Fournier, [4].

El 20 de gener de 1777 va ser destinat, ja com a primer lloctinent, a Verdun per seguir cursos de mineria. Gràcies a la seva aportació, el cos d'enginyers va poder rivalitzar amb el cos d'artilleria.

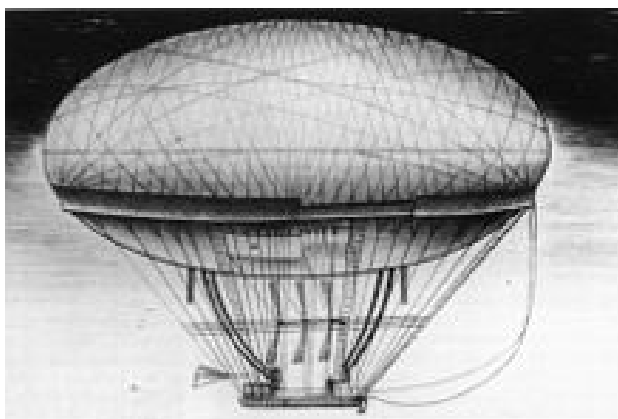
Per intervenció de Condorcet, l'Acadèmia va aconseguir del ministre de la Guerra, el comte de Saint-Germain, que Meusnier disposés cada any d'un període de permís, de l'1 d'octubre al 31 de març, per poder estar a París dedicat a la mecànica pràctica.

L'any 1779 fou enviat a Cherbourg per a la construcció del port. Naturalment, es convertí en el cap de totes les operacions, que s'allargaren durant deu anys i no estigueren exemptes de dificultats. Diu Monge ([2], p. vi): “va haver de superar no només dificultats físiques, sinó també una sèrie de dificultats morals davant les quals sol fracassar un jove sense experiència: hi havia intrigues per frustrar, homes poderosos a combatre, canalles per desemascarar; ho va fer amb un coratge molt remarcable i se'n va sortir completament.”

El 5 de juny de 1783, els germans Montgolfier van fer volar per primer cop un globus aerostàtic a Annonay. Va ser un fet molt impactant per a l'època. El 17 d'agost del mateix any, el físic Charles va fer volar un globus inflat amb hidrogen, i l'1 de desembre s'elevà ell mateix amb un d'aquests aparells.

Només dos dies després, el 3 de desembre de 1783, Meusnier va llegir a l'Acadèmia el seu treball sobre l'equilibri de les màquines aerostàtiques [9].

Va elaborar dos projectes d'aeròstats en forma d'el·lipsoide, capaços de fer la volta al món, i fou el primer a aplicar l'hèlix a la navegació aèria.



Dirigible de Meusnier.

L'any 1784, a causa dels importants treballs de Meusnier en aerostàtica, Lavoisier va demanar – i aconseguir – que el seu permís de mig any es prolongués a tot l'any. Meusnier aprofità aquesta situació per continuar treballant en el seu projecte de màquina per destil·lar aigua de mar, iniciat durant la construcció del port de Cherbourg, i sobretot per col·laborar amb Lavoisier en l'estudi de la composició de l'aigua. Així es guanyà un lloc en la història de la química moderna, tal com ja preveia Darboux a [2], p. XVIII, i com es confirma en treballs recents com el de Josette Fournier [4], del 2017, on es destaca que Meusnier no ha estat prou valorat i s'hi ofereix una narració molt detallada dels treballs

realitzats amb Lavoisier per demostrar que l'aigua està composta només d'hidrogen i oxigen (vegeu [7]).

Progressà ràpidament dins l'exèrcit: el 27 de maig de 1787 fou nomenat capità d'Enginyers; l'1 de juliol de 1788, mariscal ajudant a l'Estat Major de l'Armada; l'11 de juliol de 1789, tinent coronel; el 5 de febrer de 1792, coronel del 14è regiment d'infanteria; i el 7 de setembre de 1792, mariscal de camp.

Formà part del *Bureau de consultation pour les Arts et Métiers*, presidit per Lavoisier, que estudiava tots els invents que podien ser útils a l'Estat. Meusnier va inventar un procediment per detectar moneda falsa.

Políticament, Meusnier era jacobí i, arran de la fugida del rei Lluís XVI a Varennes, fundà la *Société patriotique du Luxembourg*, juntament amb el seu company de Mézières Jean-Nicolas Pache (1746–1823). Consta que presentà els estatuts d'aquesta societat al registre de París el 13 de gener de 1792 (vegeu l'exposició de l'enginyer Serge Le Pottier [8]).

El 14 de febrer de 1793, el general Beurnonville escriu: «J'ordonne au maréchal de camp Meusnier de partir sur le champ pour Mayence [...]» Així, Meusnier es reincorpora a l'armada del Rin, comandada pel general Custine.

Es distingeix en els combats per Mayence, ciutat ocupada per les tropes de Custine i que es volia annexionar a França, fet que el rei de Prússia, Frederic II, no permeté. Perd i recupera, el 8 de maig, la fortalesa de Kostheim. Tot seguit se li encomana la conquesta del fort de Cassel. Per fer-ne la inspecció, travessa el Rin en barca el 5 de juny i és ferit per una bala de canó a la cama, que li provoca la mort pocs dies després: mor el 13 de juny de 1793. No arribà a saber que havia estat ascendit a general un mes abans. Finalment, Mayence fou recuperada pels prussians i austríacs l'1 de juliol de 1793.

Les seves restes mortals tingueren un periple molt complicat, com explica molt bé Serge Le Pottier [8]. Després de diverses vicissituds, el 24 de setembre de 1801, l'urna funerària fou col·locada al peu d'una columna al costat de l'Arbre de la Llibertat de Tours amb la inscripció: «Profond géomètre, un ingénieur habile et un intrépide général républicain.»

El 6 de març de 1804, el govern ordenà destruir tots els arbres de la Llibertat, i l'urna fou traslladada a l'Ajuntament.

No fou fins al 1887 que l'alcalde de Tours, el doctor Fournier, encarregà una estàtua de Meusnier, que s'inaugurà solemnement a Saint-Symphorien, avui un barri de Tours. L'any 1902, a causa de les obres del tramvia, el bust fou reinstal·lat al Parc Mirabeau, i posteriorment als jardins de la Prébende d'Oë, on, el 13 de desembre de 1902, es dipositen a la seva base les restes mortals del general Meusnier.



Monument a Meusnier, a Tours.

Memòria sobre la curvatura de les superfícies

El treball més important de Jean-Baptiste Meusnier en el camp de la geometria diferencial és el que va llegir a l'Acadèmia els dies 14 i 21 de febrer de 1776, titulat *Mémoire sur la courbure des surfaces* [10]. No fou publicat fins al 1785, i Meusnier el signà com a *Lieutenant en premier, Surnuméraire au Corps Royal du Génie, Correspondant de l'Académie*. De fet, és l'únic treball de Meusnier pròpiament dedicat a la geometria diferencial.



M É M O I R E
 S U R
 L A C O U R B U R E
 D E S S U R F A C E S ,

*Par M. MEUSNIER, Lieutenant en premier,
 Surnuméraire au Corps Royal du Génie, Corres-
 pondant de l'Académie.*

LU A L'ACADÉMIE LES 14 ET 21 FÉVRIER 1776.

El treball està dividit en 39 seccions, al llarg de les quals es plantegen i resolen els cinc problemes següents:

PROBLEMA I

1. Determinar les diferents posicions que pot tenir el pla tangent respecte d'un element de superfície.

PROBLEMA II

15. Determinar el radi de curvatura de la secció feta en un element de superfície per un pla qualsevol de posició donada.

PROBLEMA III

34. Determinar quines són les superfícies que tenen els dos radis de curvatura iguals.

PROBLEMA IV

35. *Entre totes les superfícies que es poden fer passar per un perímetre donat, format per una corba de doble curvatura,⁴ trobar aquella que tingui àrea mínima.*

PROBLEMA V

38. *Trobar l'equació general de les superfícies desenvolupables.*

Donem a continuació una traducció comentada d'aquest important treball.

⁴Es refereix a corbes guexes de l'espai, les dues curvatures fan referència a curvatura i torsió. Recordem que una corba és plana si i només si la torsió és zero.

Memòria

sobre

LA CURVATURA DE LES SUPERFÍCIES

Per M. MEUSNIER *Lieutenant en premier, Surnuméraire au Corps Royal du Génie, Correspondant de l'Académie.*

LLEGIT A L'ACADÈMIA ELS DIES 14 I 21 DE FEBRER, 1776.

La teoria de la curvatura de les línies corbes es basa en aquesta propietat: que cadascun dels seus elements es pot considerar com una porció de cercle, és a dir, com a generat per la rotació d'un punt. L'objectiu d'aquesta memòria és trobar una manera de generar les superfícies que sigui igualment adequada per a cada element de superfície⁵. Es veu fins a quin punt la solució d'aquest problema ha de facilitar la resposta a totes les qüestions relatives a la forma d'un element de superfície i, per tant, a la qüestió de la curvatura, ja que no es demana res més.

El procediment que seguirem en aquesta recerca és completament anàleg al que s'ha seguit en el cas de les línies. En efecte, heus ací com s'ha raonat: la curvatura d'una línia és, evidentment, allò que fa que, d'un punt a un altre, la tangent canviï de posició, i com més considerable sigui aquest canvi, més podem dir que la curvatura és gran. Per tant, si s'imaginen dues tangents en dos punts infinitament pròxims, l'angle format per aquestes tangents mesura la curvatura de l'element comprès entre aquests dos punts, i l'expressió d'aquest angle conté tota la teoria de la curvatura. Ara bé, s'ha observat que aquesta fórmula depèn únicament de les equacions en derivades primeres i segones de l'element en qüestió; d'aquí es dedueix que una corba tangent a aquest element, que tingui en el contacte la mateixa equació en derivades segones, tindrà també la mateixa curvatura. Però sempre és possible assignar un cercle que tingui aquesta propietat; per tant, es pot considerar tot element de corba com una porció d'un cert cercle.

De manera anàloga, diem nosaltres, la curvatura d'una superfície consisteix en el fet que el pla tangent varia d'un punt a un altre: així, la curvatura d'un element de superfície depèn de la fórmula que expressa el canvi del pla tangent en tots els punts d'aquest element. Però veurem ben aviat que aquesta fórmula depèn directament de les equacions en derivades primeres i segones; per tant,

⁵L'expressió «element de superfície», que Meusnier utilitza aquí i sovint al llarg del text, fa referència a una porció infinitesimal de superfície.

una superfície tangent a l'element tindrà en el contacte la mateixa curvatura que aquest si comparteix la mateixa equació en derivades primeres i segones, i l'element en qüestió es podrà considerar com a part d'aquesta superfície.

Així, el nostre problema es redueix a trobar una superfície que tingui la propietat analítica que acabem d'enunciar i tal que la seva generació sigui coneguda i simple, ja que així es podrà atribuir la mateixa generació a l'element en qüestió.

El senyor Euler ha tractat aquesta mateixa matèria en una molt bona memòria, impresa el 1760 entre les de l'Acadèmia de Berlín.⁶ Aquest il·lustre geòmetra presenta la qüestió d'una manera diferent de la que acabem d'exposar: fa dependre la curvatura d'un element de superfície de la de les diverses seccions que es poden obtenir tallant-la amb un pla. Per això comença per determinar el radi de curvatura d'una secció feta en un element de superfície per un pla qualsevol. Tot seguit restringeix aquesta determinació al cas en què el pla tallant és perpendicular al pla tangent a l'element considerat, i descobreix aquesta bella propietat: que, entre tots els plans tallants en aquesta situació, el que dona la secció de curvatura màxima forma, amb el que dona la secció de curvatura mínima, un angle recte, sigui quina sigui la naturalesa de la superfície considerada. Finalment, fa veure que els radis de curvatura d'aquestes dues seccions són suficients per determinar tots els altres; i en conclou que es coneixerà la curvatura d'un element de superfície tan bon punt es conegui aquesta curvatura en els dos sentits on és màxima i mínima.

És clar que la qüestió de la curvatura està resolta en aquesta memòria del Sr. Euler; així, només pretenem presentar aquí la mateixa qüestió des d'un altre punt de vista, fent-la dependre d'una propietat interessant: el fet que hi ha una generació que és adequada a tot element de superfície. A més, en aquesta teoria faltaven diversos resultats importants que nosaltres aportem aquí.

PROBLEMA PRIMER

§1. *Determinar les diferents posicions que pot tenir el pla tangent en tots els punts d'un element de superfície.*

SOLUCIÓ. Sigui A (fig. 1) un punt de l'element en qüestió, i prenguem en el

⁶Es refereix a [3]. En aquest treball apareix la famosa fórmula d'Euler per a les curvatures normals, que Meusnier comenta tot seguit.

coordenades paral·leles als tres eixos. Per a un punt N d'aquesta superfície, designem AP , PM , MN les seves tres coordenades, que anomenarem respectivament u , v , t . Suposem que tenim

$$\begin{aligned} dt &= U du + V dv, \\ dU &= U' du + V' dv, \\ dV &= V' du + \gamma dv, \end{aligned}$$

amb U , V , U' , V' , γ funcions de u i v .⁸

Dit això, si anomenem u' , v' , t' les coordenades d'un punt qualsevol del pla tangent a la superfície en el punt N , l'equació d'aquest pla es pot escriure⁹

$$t - Uu - Vv = t' - Uu' - Vv'. \quad (1)$$

Suposem ara que el punt N esdevé infinitament pròxim al punt A i examinem què passa amb l'equació del pla tangent.

Per a això, anomenem e , f , g respectivament¹⁰ els valors que prenen en el

⁸Aquí simplement es deriva l'equació de la superfície $t = t(u, v)$. Així:

$$\begin{aligned} U(u, v) &= \frac{\partial t}{\partial u}(u, v), & V(u, v) &= \frac{\partial t}{\partial v}(u, v), \\ U'(u, v) &= \frac{\partial^2 t}{\partial u^2}(u, v), & V'(u, v) &= \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial v}(u, v), & \gamma(u, v) &= \frac{\partial^2 t}{\partial v^2}(u, v). \end{aligned}$$

⁹El pla tangent a la superfície en el punt $N = (u, v, t(u, v))$ està generat pels vectors $(1, 0, U(u, v))$ i $(0, 1, V(u, v))$, de manera que el vector normal al pla és $(-U(u, v), -V(u, v), 1)$.

Així, un punt de coordenades (u', v', t') pertany al pla tangent en N si i només si

$$\langle (u' - u, v' - v, t' - t), (-U(u, v), -V(u, v), 1) \rangle = 0,$$

és a dir,

$$t' - u'U(u, v) - v'V(u, v) = t - uU(u, v) - vV(u, v).$$

¹⁰Canviem aquí la notació de Meusnier, ja que avui dia s'acostuma a utilitzar e , f , g en aquest ordre per als coeficients de la segona forma fonamental. Ell usava c , e , f en aquest ordre.

punt A les funcions U' , V' , γ , de manera que en el punt A tindrem¹¹

$$dU = e du + f dv; \quad dV = f du + g dv.$$

Així, l'equació en diferències¹² segones, que generalment és

$$ddt = U ddu + V ddv + U' du^2 + 2V' dudv + \gamma dv^2,$$

esdevé,¹³ en el punt A

$$ddt = e du^2 + 2f dudv + g dv^2, \quad (2)$$

ja que, com que la nostra superfície és tangent al pla ABC en el punt A , es compleix que $U(0,0) = V(0,0) = 0$.

Ara bé, com que les coordenades AP , PM , MN són infinitament petites, les podem substituir a l'equació del pla tangent per les seves diferències. Aleshores, el primer membre d'aquesta equació esdevé $dt - U du - V dv$, que s'anul·la, ja que, en general, $dt = U du + V dv$.¹⁴ Pel que fa al segon membre, com que

Concretament:

$$\begin{aligned} e &= U'(0,0) = \frac{\partial^2 t}{\partial u^2}(0,0), \\ f &= V'(0,0) = \frac{\partial^2 t}{\partial u \partial v}(0,0), \\ g &= \gamma(0,0) = \frac{\partial^2 t}{\partial v^2}(0,0). \end{aligned}$$

¹¹ S'utilitza la mateixa notació dU tant per a la funció com per a la seva diferencial en A .

¹² Meusnier fa servir aquí, i en altres llocs del text, la paraula “différences”, que he traduït per “diferències” o “derivades”, segons el context.

¹³ Vegeu equació (20) a l'apèndix.

¹⁴ S'està aplicant l'equació del pla tangent en un punt v de coordenades infinitament petites (du, dv) , de manera que $t = t(du, dv)$. L'equació és, doncs,

$$t(du, dv) - U(du, dv) du - V(du, dv) dv = t' - U(du, dv) u' - V(du, dv) v'.$$

Substituint les funcions t , U , V pels seus desenvolupaments de Taylor a l'origen (on totes s'anul·len), concretament:

$$\begin{aligned} t(du, dv) &= U(0,0) du + V(0,0) dv + \text{termes d'ordre superior}, \\ U(du, dv) &= e du + f dv + \text{termes d'ordre superior}, \\ V(du, dv) &= f du + g dv + \text{termes d'ordre superior}, \end{aligned}$$

obtenim la igualtat (3) afectada per termes d'ordre superior com $(du)^2$, $(dv)^2$, etc.

U i V són nul·les en A , les podem substituir per les seves derivades, de manera que l'equació (1) del pla tangent esdevé

$$t' = u'(e du + f dv) + v'(f du + g dv), \quad (3)$$

en la qual les diferències du, dv expressen les coordenades AP, PM del punt v on es calcula aquest pla tangent.

Com que els coeficients de u', v' són infinitament petits en aquesta equació, se'n dedueix que a coordenades u', v' finites correspon una ordenada t' infinitament petita, és a dir, que el pla tangent en v forma amb el pla BAC un angle infinitament petit.

Aquest angle mesura quant ha canviat el pla tangent entre el punt A i el punt v . Així, donada l'expressió d'aquest angle, sigui quin sigui el punt v , la curvatura de l'element de superfície quedarà determinada en totes les direccions possibles. Ara bé, és sabut que donada l'equació d'un pla de la forma que hem vist, el sinus de l'angle que fa aquest pla amb el pla horitzontal, és l'arrel quadrada de la suma dels quadrats dels coeficients d'aquestes coordenades en l'equació del pla.¹⁵

Per tant, com que l'angle que busquem és infinitament petit, el podem aproximar pel seu sinus i tindrem¹⁶

$$\Xi = \sqrt{(e du + f dv)^2 + (f du + g dv)^2}. \quad (4)$$

C.Q.E.T.¹⁷

COROLLARI PRIMER

§2. Si imaginem una superfície tangent en A al pla BAC que tingui, en el punt de contacte, la mateixa equació (2) en derivades segones –és a dir, per a

¹⁵Es veu fàcilment que donat un pla de la forma $t' = au' + bv'$, amb a, b infinitèsims, el sinus de l'angle que forma la normal al pla, $(a, b, -1)$, amb la normal al pla horitzontal $(0, 0, 1)$ és

$$\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{1 + a^2 + b^2}} \simeq \sqrt{a^2 + b^2}.$$

¹⁶Com que hem usat el desenvolupament de Taylor l'expressió més precisa de l'angle seria $\Xi = \sqrt{(e du + f dv)^2 + (f du + g dv)^2} + O(\|(du, dv)\|^3)$. Vegeu la fórmula (24) de l'Apèndix D.

¹⁷He mantingut l'expressió *Ce Qu'il Fallait Trouver*.

la qual les quantitats e, f, g siguin les mateixes que aquí— és clar que l'equació del pla tangent en el punt v i l'expressió de l'angle Ξ seran idèntiques a les de l'element de superfície que estem considerant, sigui quin sigui el punt v .

Per tant, *tota superfície tangent a l'element de superfície donat i que tingui en el punt de contacte la mateixa equació en derivades segones tindrà també la mateixa curvatura.*

COROL·LARI II

§3. Per tant, la superfície d'equació

$$t = \frac{eu^2 + 2fuv + gv^2}{2} \quad (5)$$

té, en el punt A , la mateixa curvatura que la superfície inicial, ja que hi és tangent i, en derivar-ne l'equació, dona la mateixa expressió en derivades segones.

Així, tot element de superfície pot ser considerat com una part d'aquesta superfície quadràtica d'equació donada a (5).

COROL·LARI III

§4. Sigui N un punt de la superfície que estem considerant; tracem en el pla BAC una línia qualsevol AG , i des del punt M tracem la perpendicular Mp a AG ; transformem, aleshores, l'equació (5) respecte de les noves coordenades Ap, pM .¹⁸

Per a això introduïm la notació següent:

$$\varphi = \angle CAG, \quad Ap = u', \quad pM = v',$$

i continuem denotant MN per t ;¹⁹ des del punt p tracem pq, pr paral·leles

¹⁸Per eliminar el terme uv de l'expressió (5) és ben sabut que cal fer, en el pla u, v , un gir d'angle φ donat per la condició $\tan(2\varphi) = \frac{2f}{e-g}$. Meusnier repeteix aquí els arguments habituals que porten a aquesta conclusió.

¹⁹Recordem $AP = u, PM = v$.

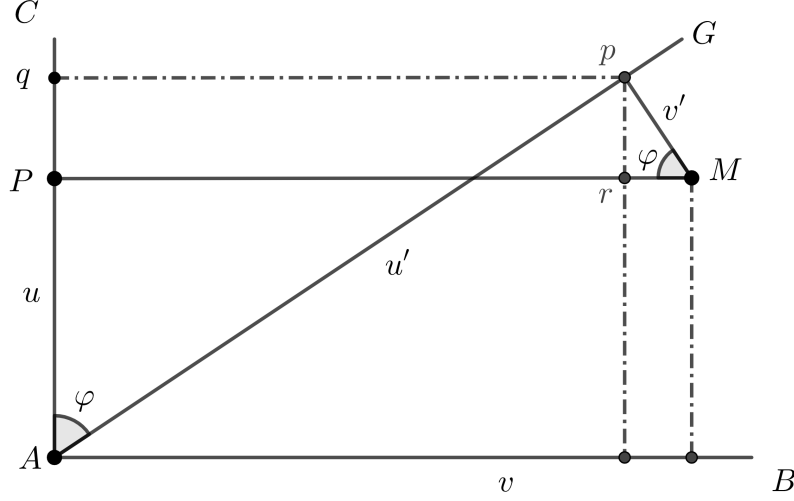


Figura 3: *Canvi de coordenades.*

als eixos AB, AC ; els triangles Apq, prM donaran

$$\begin{aligned} Aq &= Ap \cdot \cos(CAG) = u' \cos \varphi, \\ pq &= Ap \cdot \sin(CAG) = u' \sin \varphi, \\ pr &= pM \cdot \sin(CAG) = v' \sin \varphi, \\ rM &= pM \cdot \cos(CAG) = v' \cos \varphi, \end{aligned}$$

per tant, com que $AP = Aq - pr$, $PM = pq + rM$ tindrem

$$\begin{aligned} u &= u' \cos \varphi - v' \sin \varphi, \\ v &= u' \sin \varphi + v' \cos \varphi. \end{aligned}$$

Posant ara els valors de u i v a l'equació (5) obtenim

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2} (e(u' \cos \varphi - v' \sin \varphi)^2 + 2f(u' \cos \varphi - v' \sin \varphi)(u' \sin \varphi + v' \cos \varphi) \\ &+ g(u' \sin \varphi + v' \cos \varphi)^2) \\ &= u'^2 (e \cos^2 \varphi + f \sin(2\varphi) + g \sin^2 \varphi) \frac{1}{2} \\ &+ v'^2 (e \sin^2 \varphi - f \sin(2\varphi) + g \cos^2 \varphi) \frac{1}{2} \\ &+ u' v' (f(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - (g - e) \sin \varphi \cos \varphi). \end{aligned}$$

Fem de manera que el terme que conté el producte $u'v'$ de les coordenades desaparegui; per a això, posem $f(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - (g - e) \sin \varphi \cos \varphi = 0$, és a dir

$$\tan(2\varphi) = \frac{2f}{e-g},$$

i la nostra equació queda de la forma

$$\begin{aligned} t = & u'^2(e \cos^2 \varphi + f \sin(2\varphi) + g \sin^2 \varphi) \frac{1}{2} \\ & + v'^2(e \sin^2 \varphi - f \sin(2\varphi) + g \cos^2 \varphi) \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (6)$$

Llavors és evident que la superfície és simètrica respecte de l'eix AG , ja que tant si v' és positiu com negatiu, el valor de t és el mateix.²⁰

§5. Per tant, si es traça una línia AG tal que $\tan(2\varphi) = \frac{2f}{e-g}$, la nostra superfície serà simètrica respecte d'aquesta línia. Però aquesta equació dona per a 2φ dos valors que difereixen entre ells de 180° , és a dir, tenim per a φ dos valors que difereixen en 90° , o, per a AG , dues posicions perpendiculars entre si. Existeix, doncs, encara un eix IL , perpendicular a AG , respecte del qual la nostra superfície també és simètrica. Com que tot el que diem d'aquesta superfície es pot afirmar de l'element de superfície en qüestió, se'n segueix que *tot element de superfície és simètric de manera que pot ser dividit en quatre parts semblants*.

§6. És clar que la superfície de la qual hem parlat fins ara tindrà la mateixa equació en diferències segones que l'element de superfície en qüestió, siguin quins siguin els eixos respecte dels quals es consideri l'equació; per tant, si diferenciem dues vegades l'equació (6) i fem $u' = 0$, $v' = 0$, l'equació a què arribem per aquest mitjà,²¹

$$\begin{aligned} ddt = & du'^2(e \cos^2 \varphi + f \sin(2\varphi) + g \sin^2 \varphi) \\ & + dv'^2(e \sin^2 \varphi - f \sin(2\varphi) + g \cos^2 \varphi), \end{aligned} \quad (7)$$

serà també l'equació en diferències segones del nostre element de superfície, respecte dels eixos AG, IL .

²⁰Aquest eix AG és, en llenguatge actual, una direcció principal. L'argument sobre el signe de v' , potser una mica mal expressat, val igual per al signe de u' , però Meusnier no ho diu aquí, sinó que ho deixa per a l'apartat següent.

²¹Només cal observar que $dd(u'^2) = d(2u'du') = 2(du')^2 + 2u'ddu'$. I aquest darrer terme és zero ja que estem en un punt amb $u' = 0$. Mateix argument per a ddv'^2 .

TEOREMA

§7. *Tot element de superfície es pot considerar com generat per la rotació d'un petit arc de cercle al voltant d'un eix paral·lel al pla tangent a aquest element.*

DEMOSTRACIÓ. Sigui fEF (fig. 1) un eix paral·lel al pla BAC que talla l'eix AD en E i tal que la seva projecció cau sobre AG ; sigui kAh un arc de cercle tangent en A a la línia AG , tal que el seu pla passi per EF : suposem que aquest

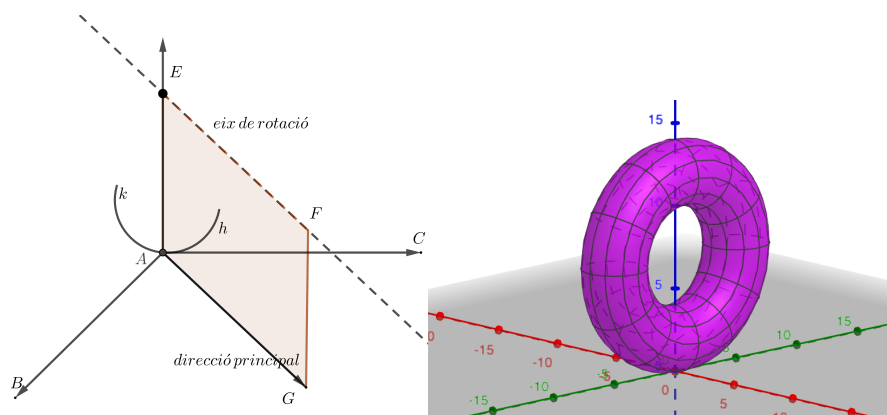


Figura 4: *El tor que aproxima.*

arc de cercle, en girar al voltant de EF , genera una superfície de revolució. El teorema restarà demostrat si es pot mostrar que és possible assignar al radi de l'arc kAh i a la distància EA uns valors tals que la superfície així generada tingui, en A , la mateixa equació en derivades segones que l'element de superfície donat; ja que llavors es podrà considerar com a part d'aquesta superfície i, per tant, com a generada de la mateixa manera.

Sigui, doncs, el radi de l'arc kAh igual a r i $EA = \rho$.²² Afirmo que la superfície generada per l'arc kAh és clarament simètrica tal com s'ha enunciat més amunt: la seva equació en diferències segones és, per tant, de la mateixa forma que l'equació (7), és a dir, $ddt = Adu'^2 + Bdv'^2$.

§8. Per determinar A i B , remarquem que, si tallem la superfície de revolució en qüestió amb un pla vertical que passi per AG , la secció serà l'arc kAh ;

²² És ben sabut que els radis de curvatura principals d'un tor de revolució, en els punts del paral·lel més gran, són iguals al radi de la circumferència generatriu i al radi d'aquest paral·lel. Observem que aquí es defineixen r i ρ com un radi i una distància – quantitats, per tant, positives –, però els càlculs conduiran a expressions per a r i ρ que poden ser negatives.

així, si fem $dv' = 0$ en la nostra equació, aquesta esdevé l'equació en diferències segones de l'arc kAh , és a dir,

$$ddt = Adu'^2 = \frac{du'^2}{r}.$$

Per tant, $A = \frac{1}{r}$. Anàlogament, si tallem la superfície amb un pla vertical que passi per IL perpendicularment a AG , la secció serà un arc iAb , de radi $EA = \rho$. Per tant, si posem $du' = 0$ en l'equació anterior, ha de correspondre a l'equació d'aquest arc, és a dir,

$$ddt = Bdv'^2 = \frac{dv'^2}{\rho}.$$

Per tant, $B = \frac{1}{\rho}$. Així, l'equació en diferències segones de la nostra superfície de revolució és

$$ddt = \frac{du'^2}{r} + \frac{dv'^2}{\rho}. \quad (8)$$

§9. Ara, com que aquesta equació ha de coincidir amb la del nostre element de superfície, igualem-la terme a terme amb l'equació (7). Tindrem

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} &= e \cos^2 \varphi + f \sin(2\varphi) + g \sin^2 \varphi = \frac{(e+g) + (e-g) \cos(2\varphi) + 2f \sin(2\varphi)}{2}, \\ \frac{1}{\rho} &= e \sin^2 \varphi - f \sin(2\varphi) + g \cos^2 \varphi = \frac{(e+g) - (e-g) \cos(2\varphi) - 2f \sin(2\varphi)}{2}. \end{aligned}$$

Però l'equació $\tan(2\varphi) = 2f/(e-g)$ dona

$$\cos(2\varphi) = \frac{e-g}{\pm \sqrt{(e-g)^2 + 4f^2}}, \quad \sin(2\varphi) = \frac{2f}{\pm \sqrt{(e-g)^2 + 4f^2}}.$$

Substituint aquests valors, tindrem

$$r = \frac{2}{e+g \pm \sqrt{(e-g)^2 + 4f^2}}, \quad \rho = \frac{2}{e+g \mp \sqrt{(e-g)^2 + 4f^2}}.$$

Heus aquí, doncs, quines han de ser les quantitats r i ρ perquè la generació que hem enunciat sigui adequada per a l'element que estem considerant.

§10. Observem ara que el radical que apareix en les expressions de r i ρ és una suma de dos quadrats i, per tant, necessàriament positiu; que les expressions de $\sin(2\varphi)$ i $\cos(2\varphi)$ es troben sempre entre -1 i 1 , i que, en conseqüència,

els nostres resultats no poden ser mai imaginaris. Així, el nostre teorema és vàlid en tots els casos.

C.Q.F.D.²³

§11. És clar que la posició de l'eix de rotació queda ara determinada, ja que la seva projecció sobre el pla BAC és expressada per l'equació $\tan(2\varphi) = 2f/(e - g)$, i disposem de l'expressió de EA , és a dir, de la distància a aquest pla. Res no és, per tant, més fàcil que expressar aquesta posició mitjançant dues equacions anàlogues a les que s'utilitzen per representar una corba a l'espai. Per a això, siguin u, v, t les coordenades dels punts de l'eix de rotació; tenim, evidentment, que per a tots aquests punts, $t = EA = \rho$, i a més, $\frac{v}{u} = \tan \varphi$; però

$$\tan \varphi = \frac{1 + \sin(2\varphi) - \cos(2\varphi)}{1 + \sin(2\varphi) + \cos(2\varphi)}.$$

Substituint $\rho, \sin(2\varphi)$ i $\cos(2\varphi)$ pels seus valors, s'obtenen, per a l'eix de rotació, les equacions següents²⁴

$$t = \frac{2}{e + g \mp \sqrt{(e - g)^2 + 4f^2}}, \quad \frac{v}{u} = \frac{-(e - g) \pm \sqrt{(e - g)^2 + 4f^2}}{2f}. \quad (9)$$

§12. Hem vist (§5) que hi ha dos valors de φ que són igualment vàlids, és a dir, dues posicions possibles per a AG , o per a la projecció de l'eix de rotació. Hi ha, doncs, dos eixos, amb projeccions perpendiculars entre elles, cadascun dels quals és adequat per a la generació de l'element de superfície.

Això és el que signifiquen els dobles signes que apareixen en les expressions dels valors de r i ρ , així com en les equacions anteriors: si el signe superior correspon a l'eix EF , el signe inferior correspondrà a un altre eix $\varphi e\Phi$, que talla l'eix AD en e (fig. 1), de manera que el segment Ae és igual al radi de l'arc kAh . Al voltant d'aquest segon eix, l'arc iAl , de radi igual a EA , generarà també, en girar, l'element de superfície en qüestió.

²³He mantingut l'expressió *Ce Qu'il Fallait Démontrer*.

²⁴Aquestes direccions, segons la construcció realitzada, són les direccions principals. Avui dia és sabut que el pendent que formen aquestes direccions respecte de les coordenades inicials (l'angle que hem anomenat φ i $\varphi + \pi/2$) són les arrels de l'equació $fx^2 - (g - e)x - f = 0$ (Vegeu per exemple, *Notes sobre corbes i superfícies*, p.149 i p.151. <https://mat.uab.cat/web/agusti/wp-content/uploads/sites/13/2022/05/2018GeoDif.pdf>).

§13. Finalment, remarquem que, sigui quin sigui el signe que prenguem, les expressions de r i ρ no canvien en absolut; és per això que, a partir d'ara, adoptarem el signe superior i escriurem

$$r = \frac{2}{e + g + \sqrt{(e - g)^2 + 4f^2}}, \quad \rho = \frac{2}{e + g - \sqrt{(e - g)^2 + 4f^2}}.$$

§14. Aquesta és, doncs, la generació pròpia de tot element de superfície que ens proposem determinar. Com es pot veure, aquesta generació simplifica notablement la qüestió de la curvatura, ja que fa dependre la forma de tot element de superfície de dues quantitats: r i ρ . Per aquest motiu, anomenem aquestes dues quantitats *radis de curvatura* de les superfícies. A continuació, examinarem les diferents formes que pot prendre un element de superfície segons els diversos valors de r i ρ .

Per tal d'entendre com apareixen els nostres dos radis de curvatura en la memòria del Sr. Euler –i per aportar alhora més llum sobre aquesta matèria–, resoldrem el problema següent.

PROBLEMA II

§15. *Determinar el radi de curvatura de la secció produïda en un element de superfície per un pla qualsevol de posició donada.*²⁵

SOLUCIÓ. Siguin (fig. 2) AL , AG , AD els mateixos eixos que a la figura 1,

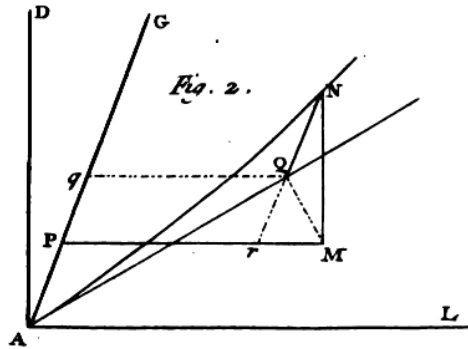


Figura 5: *Figura 2 de Meusnier.*

²⁵Aquest és el mètode emprat per Euler a [3] per estudiar superfícies, tal com ja ha comentat Meusnier a la introducció d'aquest article.

és a dir, que l'element de superfície que considerem és simètric respecte dels eixos AL, AG ²⁶. Sigui N un punt de la superfície a la qual pertany l'element, i siguin AP, PM, MN les coordenades d'aquest punt.

Suposem que AQ sigui la intersecció del pla LAG amb el pla que talla l'element, i sigui AN la corba segons la qual la superfície és tallada. El problema que ens proposem consisteix a trobar el radi de curvatura de la corba AN en el punt A .

Per fer-ho, tracem des del punt N la perpendicular NQ a AQ , unim els punts Q i M per la recta QM , l'angle MQN mesurarà la inclinació del pla que talla. Considerem AQ, QN com les coordenades de la corba AN en el seu pla. Amb aquestes definicions, mantenim les denominacions $AP = u', PM = v', MN = t$, i definim $AQ = x; QN = y; \alpha = \angle QAG, \omega = \angle NQM$.²⁷

Recordem que (8), l'equació en diferències segones de l'element es pot posar com

$$ddt = \frac{du'^2}{r} + \frac{dv'^2}{\rho}. \quad (10)$$

Ara, mitjançant els triangles AqQ, QrM , i seguint el mateix procediment emprat en el corollari tercer del primer problema, obtenim

$$\begin{aligned} AP &= AQ \cdot \cos \alpha - QM \cdot \sin \alpha, \\ PM &= AQ \cdot \sin \alpha + QM \cdot \cos \alpha, \end{aligned}$$

²⁶Reprodueixo la figura 2 remarcant el pla que talla i la situació en el pla AGL .

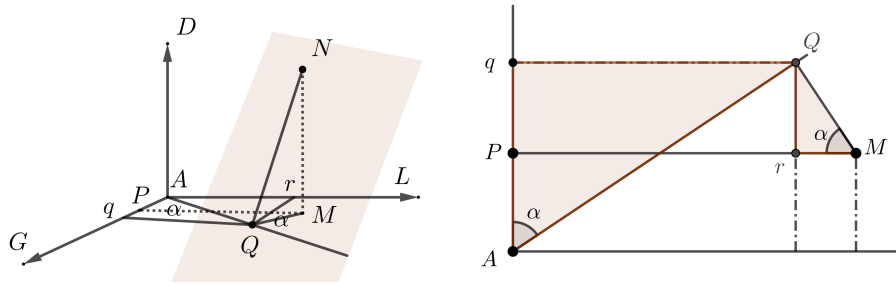


Figura 6: Aclariment a la figura 2 de Meusnier.

²⁷Observem que, per construcció, MQ és perpendicular a AQ .

i, del triangle QNM , n'obtenim

$$\begin{aligned}QM &= QN \cdot \cos \omega, \\MN &= QN \cdot \sin \omega.\end{aligned}$$

Substituint el valor de QM en les dues igualtats, i traduint tot segons les nostres denominacions (inclosa la que dona el valor de MN), tenim

$$\begin{aligned}u' &= x \cos \alpha - y \cos \omega \sin \alpha, \\v' &= x \sin \alpha + y \cos \omega \cos \alpha, \\t &= y \sin \omega.\end{aligned}$$

Diferenciem ara aquestes equacions per a una porció infinitament petita de la corba AN en A , tot observant que $dy = 0$; ²⁸ com que la corba AN és tangent en A a la recta AQ , tindrem²⁹

$$\begin{aligned}du' &= dx \cdot \cos \alpha, \\dv' &= dx \cdot \sin \alpha, \\ddt &= ddy \cdot \sin \omega.\end{aligned}$$

Substituint aquests valors de du', dv', ddt a l'equació (10), obtenim

$$ddy = \frac{\rho \cos^2 \alpha + r \sin^2 \alpha}{r \rho \sin \omega} dx^2,$$

que és l'equació en diferències segones de la corba AN en el punt A .

D'altra banda, si denotem per ds l'element de longitud de la corba AN , i per R el seu radi de curvatura en un punt qualsevol, tenim en general³⁰

$$R = \frac{ds^3}{dx ddy}.$$

²⁸La corba d'intersecció entre la superfície i el pla donat es pot escriure com $y = y(x)$, i és sabut que la curvatura d'una tal corba és expressada per $k(x) = \frac{y''(x)}{(\sqrt{1 + y'(x)^2})^3}$. Com que la corba és tangent al pla $t = 0$ en $x = 0$, tenim $y'(0) = 0$, i la curvatura de la corba intersecció al punt A val, per tant, $y''(0)$.

²⁹Recordem que les diferències es poden interpretar com derivades a l'origen, de manera que tenim $\frac{du'}{dx}|_{x=0} = \cos \alpha$, $\frac{dv'}{dx}|_{x=0} = \sin \alpha$, $\frac{d^2 t}{dx^2}|_{x=0} = \frac{d^2 y}{dx^2}|_{x=0} \sin \omega$.

³⁰Com que $ds = (1 + y'^2)^{1/2} dx$, $dy = y' dx$, $ddy = y'' dx^2$, la fórmula habitual del radi de curvatura esdevé

$$R = \frac{(1 + y'^2)^{3/2}}{y''} = \frac{(ds/dx)^3}{ddy/(dx)^2} = \frac{ds^3}{dx ddy}.$$

Com que dx el suposem constant (som mestres en fer-ho), i al punt A tenim $ds = dx$, resulta que

$$R = \frac{dx^2}{ddy}.$$

Substituint el valor de ddy , obtenim³¹

$$R = \frac{r\rho \sin \omega}{\rho \cos^2 \alpha + r \sin^2 \alpha}, \quad \text{o bé,} \quad R = \frac{2r\rho \sin \omega}{r + \rho - (r - \rho) \cos(2\alpha)}.$$

C.Q.E.T.

§16. Restringim-nos, com fa el Sr. Euler, al cas en què el pla que talla és perpendicular al pla tangent, i cerquem el *maximum* i el *minimum* de R . Com que $\sin \omega = 1$, el valor de R esdevé

$$R = \frac{2r\rho}{r + \rho - (r - \rho) \cos(2\alpha)}.$$

Com que el numerador d'aquesta expressió és constant, per obtenir el *maximum* o el *minimum*, n'hi ha prou amb igualar a zero la derivada del denominador, la qual ens dona $\sin(2\alpha) = 0$. Per tant, $\cos(2\alpha) = \pm 1$, valors que, substituïts a l'expressió de R , donen $R = r$ o $R = \rho$. Una d'aquestes expressions correspon al *maximum* i l'altra al *minimum*.

Això ens mostra que *els nostres radis de curvatura són, en realitat, el major i el menor dels radis de curvatura de les seccions fetes a l'element de superfície per plans perpendiculars al pla tangent*.

§17. El resultat $\cos(2\alpha) = \pm 1$ dona $\alpha = 0$ o $\alpha = 90^\circ$, cosa que demostra la propietat establerta pel Sr. Euler: *els dos plans que donen la màxima i la mínima curvatura són perpendiculars entre ells*.

§18. En lloc de considerar els plans que tallen perpendicularment l'element, és a dir, els que passen per la normal, considerem tots els que passen per una mateixa recta AQ , situada en el pla tangent. Per a tots aquests plans, l'angle α és el mateix; podem, doncs, escriure l'expressió general del radi de curvatura en la forma $R = H \sin \omega$ on H és una constant. Entre tots aquests plans, n'hi ha un que és perpendicular al pla tangent, i que compleix, per tant, $\sin \omega = 1$.

³¹ Observem que la fórmula anterior per a R , en el cas $\omega = \pi/2$, invertint-la i dividint entre $r\rho$, dona la famosa fórmula d'Euler per a les curvatures normals, que en notació actual s'escriu com $k_n(\alpha) = k_1 \cos^2 \alpha + k_2 \sin^2 \alpha$.

Si anomenem R' el radi de curvatura de la secció feta per aquest pla, tindrem $R' = H$. Per tant, $R = R' \sin \omega$, equació que mostra que, donat el radi de curvatura de la secció feta pel pla perpendicular al pla tangent, els radis de curvatura de totes les altres seccions estan determinats per una relació independent de la naturalesa de la superfície.³²

Si ens imaginem una esfera tangent en A al pla LAG i en diem R'' el seu radi, aquesta esfera és també tallada pels mateixos plans que el nostre element de superfície. Denotant per R el radi de curvatura d'una secció qualsevol d'aquesta esfera, és evident que, com abans, $R = R'' \sin \omega$, ja que el pla perpendicular al pla tangent talla l'esfera en un meridià, el radi del qual és R'' .

Per tant, si $R' = R''$, tant per a l'esfera com per a l'element de superfície, tindrem $R = R' \sin \omega$. D'això se'n desprèn aquesta propietat curiosa: *Si tallem un element de superfície per un pla perpendicular a ell, i imaginem una esfera tangent a la superfície amb radi igual al radi de curvatura de la secció considerada, qualsevol altre pla que passi per la intersecció d'aquest primer pla amb el pla tangent determinarà, tant sobre l'esfera com sobre la superfície, seccions d'igual curvatura.*

Passem ara a examinar les diferents formes que pot tenir una superfície se-

³²Aquesta igualtat fou coneguda durant molt de temps com el Teorema de Meusnier. És citat, per exemple, per Siméon-Denis Poisson el 1832 a [14]. El 1848, Ossian Bonnet el cita i en dona una nova demostració a [1]. Avui dia, però, quan es parla del Teorema de Meusnier, es fa referència a una petita generalització d'aquest resultat: s'aplica a corbes arbitràries sobre una superfície (no necessàriament seccions planes, com en el cas original de Meusnier) que tenen en un punt P el mateix vector tangent.

Concretament, el Teorema de Meusnier afirma actualment que, si dues corbes sobre una superfície tenen el mateix vector tangent en un punt P , llavors tenen la mateixa curvatura normal en aquest punt. Com que una d'aquestes corbes pot ser la corba secció normal, s'obté la relació $k \cos \alpha = k_n$, on k és la curvatura de la corba $c(t)$ en el punt $P = c(0)$ (com corba de l'espai), α l'angle entre la normal principal de la corba i la normal v a la superfície en P , i k_n la curvatura, també en P , de la secció normal determinada pel pla que passa P i és generat per v i $c'(0)$.

Aquesta generalització resulta senzilla un cop es coneixen bé l'endomorfisme de Weingarten W i la segona forma fonamental II , conceptes molt posteriors a Meusnier, ja que només cal veure que corbes sobre la superfície amb el mateix vector tangent en P tenen també la mateixa curvatura normal en P . En efecte, tenim

$$k_n = \langle c'', v \rangle = -\langle c', v' \rangle = \langle c', Wc' \rangle = II(c', c'),$$

un resultat que mostra que k_n només depèn el vector tangent $c'(0)$ de la corba.

Un dels primers llocs on apareix aquesta versió és en el treball de G. Ricci, de l'any 1898, [15], p.284, on en dona una demostració fent servir el seu "càlcul diferencial absolut".

gons la seva curvatura, i donem les característiques analítiques que permeten reconèixer-les.

§19. Les expressions que hem trobat per als radis de curvatura poden ser tant positives com negatives. Per tal d'esbrinar quina forma ha de tenir l'element de superfície al qual pertanyen, reprenem la fórmula

$$R = \frac{2r\rho \sin \omega}{r + \rho - (r - \rho) \cos(2\alpha)},$$

que dona el radi de curvatura d'una secció qualsevol, i la reescrivim en la forma

$$R = \frac{2r\rho \sin \omega}{r(1 - \cos(2\alpha)) + \rho(1 + \cos(2\alpha))}.$$

Dit això, o bé r i ρ són positius, o bé són negatius, o bé tenen signes contraris.

§20. En el primer cas, el denominador de R és sempre positiu, ja que els coeficients de r i ρ ho són per a tot valor de α . Per tant, el valor de R és sempre positiu. D'això se'n deriva que, en aquest cas, dins de l'element considerat només es poden obtenir seccions còncaues, és a dir, que l'element mateix és còncau.

§21. Si r i ρ són negatius, el numerador de R continua essent positiu; però el denominador és negatiu, ja que els coeficients de r i ρ són sempre positius. Per tant, en aquest cas, totes les seccions que es poden fer a l'element de superfície són convexes, és a dir, l'element mateix és convex.

§22. Reprenem les expressions dels radis de curvatura r i ρ que hem donat a §13 i transformem-les com segueix:

$$r = \frac{2}{e + g + \sqrt{(e + g)^2 + 4(f^2 - eg)}}, \quad \rho = \frac{2}{e + g - \sqrt{(e + g)^2 + 4(f^2 - eg)}},$$

i remarquem que el seu producte val

$$r\rho = \frac{-1}{f^2 - eg}.$$

Dit això, en els dos casos que acabem de detallar, en que r i ρ tenien el mateix signe, el seu producte és positiu i, per tant, $f^2 - eg < 0$. És clar, a més,

que si $e + g$ és positiu, llavors r i ρ seran positius, i viceversa. És a dir, que la condició de concavitat és $e + g > 0$, i la de convexitat és $e + g < 0$, sempre que al mateix temps tinguem $f^2 - eg < 0$.

§23. Ens falta examinar el cas en què els dos radis de curvatura són de signe contrari. És evident, en primer lloc, que $r\rho$ ha de ser una quantitat negativa, i per tant $f^2 - eg > 0$; a més, sigui quin sigui el signe de $e + g$, r serà sempre positiu i ρ negatiu. Ara escrivim el valor de R així:

$$R = \frac{\left(\frac{2r\rho \sin \omega}{r-\rho}\right)}{\frac{r+\rho}{r-\rho} - \cos(2\alpha)}.$$

En el cas que tractem, on r és sempre positiu i ρ negatiu, $r - \rho$ és una quantitat positiva; per tant, la fracció que apareix al numerador serà sempre negativa, ja que $r\rho$ ho és. A més la quantitat $\frac{r+\rho}{r-\rho}$ està entre els límits $+1$ i -1 , a causa dels signes oposats de r i ρ . Segons els valors de α , de vegades tindrem $\cos(2\alpha) > \frac{r+\rho}{r-\rho}$, i de vegades $\cos(2\alpha) < \frac{r+\rho}{r-\rho}$.

En el primer cas, R serà positiu i les seccions fetes a l'element seran cònca-
ves; en el segon cas seran convexes. Per tant: *quan els dos radis de curvatura són de signe contrari, les seccions que es poden fer sobre l'element són unes cònca-
ves i les altres convexes.*

§24. En el pas de seccions còncaves a seccions convexes tenim

$$\cos(2\alpha) = \frac{r+\rho}{r-\rho}, \quad \text{o bé } R = \infty.$$

En resulten, per a α dos valors que ara construïm. Siguin (fig.3) AG , AL els eixos
perpendiculars entre ells, que divideixen simètricament l'element de superfície

Fig. 3.

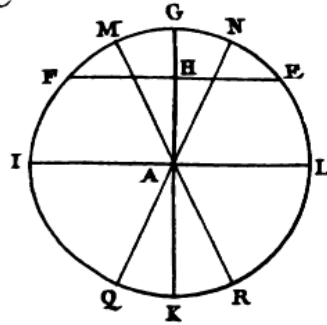


Figura 7: Figura 3 de Meusnier.

que considerem. Des del centre A , es descriu el cercle $IKGL$ de radi $= 1$; prenem $AH = \frac{r+\rho}{r-\rho}$ i tracem FHE perpendicular a AH . Els dos valors que corresponen a l'arc 2α són GE i $GLKF$, ja que AH és alhora el cosinus de l'un i de l'altre, i per tant, l'equació

$$\cos(2\alpha) = \frac{r+\rho}{r-\rho}$$

és satisfeta.

Així doncs, si aquests arcs es divideixen en dues parts iguals en els punts N i R , GN i GLR seran els valors de ω donats per l'equació anterior. D'això se'n dedueix que, si es tracen els diàmetres NQ, RM , qualsevol pla que passi per aquests diàmetres donarà lloc a una secció de curvatura nul·la, ja que $R = \infty$. Per tant: *quan els dos radis de curvatura són de signe contrari, hi ha dins l'element de superfície, dues direccions sobre les quals la curvatura és nul·la.*

§25. Si es tingués $r = \infty$ o $\rho = \infty$, és a dir, si l'element de superfície es pogués considerar com una porció de cilindre, tindríem $AH = \frac{r+\rho}{r-\rho} = \pm 1$. Això significa que els diàmetres NQ i MR , al llarg dels quals la curvatura és nul·la, es confondrien l'un amb l'altre, o bé amb GK o amb IL . Per tant: *quan un dels radis de curvatura és infinit, no hi ha dins l'element de superfície més que una sola direcció en què la curvatura és nul·la.*

§26. Acabem de veure (§23) que, si

$$\cos(2\alpha) > \frac{r+\rho}{r-\rho}$$

és a dir, si $\cos(2\alpha) > AH$, llavors, sigui quin sigui el valor de ω , la secció feta dins l'element és còncaua.

Ara bé, $\cos(2\alpha) > AH$ implica $\alpha < GN$ o bé $\alpha > GLR$; cosa que vol dir, igualment, que en aquest cas, el pla tallant és dins l'angle MAN i dins del seu oposat pel vèrtex. És, doncs, la part de l'element de superfície compresa entre aquests dos angles la que és susceptible de donar lloc a seccions còncaues. Provarem igualment que és la porció compresa dins l'angle NAR i el seu oposat MAQ la que és susceptible de donar seccions convexes.

§27. Així, en aquesta situació, l'element de superfície no és ni còncau ni convex. Tanmateix, si l'angle MAN és més gran que l'angle NAR , la part que dona lloc a seccions còncaues serà més gran que la que dona lloc a seccions convexes, i es podrà dir, d'alguna manera, que l'element de superfície és més còncau que convex. És per això que l'anomenarem *convex-còncau*.

Si, al contrari, l'angle NAR és més gran que l'angle MAN , la part de l'element que dona lloc a seccions convexes serà més gran que el que dona lloc a seccions cònques, i l'anomenarem *còncav-convexa*.

En el primer cas, l'angle MAN és obtús; i com que aquest angle té per mesura un arc MN igual a GE , se'n dedueix que l'arc GE és més gran que 90° , i així AH és negatiu. Ara bé, $AH = \frac{r+\rho}{r-\rho}$; a més $r - \rho$ és necessàriament una quantitat positiva, com ja hem demostrat. Per tant, $r + \rho$ ha de ser negatiu. Però,

$$r + \rho = -\frac{e+g}{f^2 - eg},$$

expressió que només pot ser negativa si $e + g$ és positiu, ja que hem vist que $f^2 - eg$ és positiu en el cas que tractem. És necessari, doncs, que per tal que un element de superfície sigui convex-còncav, es compleixi $e + g > 0$.

En el segon cas, l'angle MAN és agut, i per consegüent, l'arc GE és menor que 90° , és a dir, AH positiu. Per tant, l'element de superfície és còncav-convexa si es té $e + g < 0$, sempre que, en aquests dos últims casos, es compleixi també $f^2 - eg > 0$.

Còncava.....	$f^2 - eg < 0$, i $e + g > 0$.
Convexa.....	$f^2 - eg < 0$, i $e + g < 0$.
Convex-Còncava.....	$f^2 - eg > 0$, i $e + g < 0$.
Còncav-Convexa.....	$f^2 - eg > 0$, i $e + g > 0$.

Heus aquí, doncs, per a les superfícies, quatre estats de curvatura anàlegs als dos que es distingeixen en les línies sota els noms de concavitat i convexitat. És clar que tots els casos estan compresos en aquesta classificació, sempre que s'hi incloguin aquells en què les quantitats, el signe de les quals determina aquests diferents estats, són nul·les o infinites. Tanmateix, cal remarcar que la diferència entre la tercera i la quarta situació és purament analítica i no és perceptible a la vista: en les superfícies, la vista no distingeix més que tres estats de curvatura.

Fins ara, hem referit sempre l'element de superfície que consideràvem al pla que li és tangent. Aquest mètode, que com es veu és molt còmode mentre només es tracti un sol element, esdevé insuficient quan se'n volen comparar diversos i amb més raó encara, quan es vol examinar la superfície sencera.

És per això que, suposant que l'element que ens ocupa està referit a uns eixos qualssevol, transformarem les nostres fórmules amb relació a aquests eixos, començant per les quantitats e, f, g de les quals depenen totes les altres.

Transformació de les quantitats e, f, g .

§28. Siguin OB, OC, OD (fig. 4) tres eixos perpendiculars entre ells, i als quals es refereix la superfície a la qual pertany l'element que hem considerat fins aquí. D'aquests tres eixos, dos – OB i OC – són horitzontals, i el tercer, OD , és vertical.

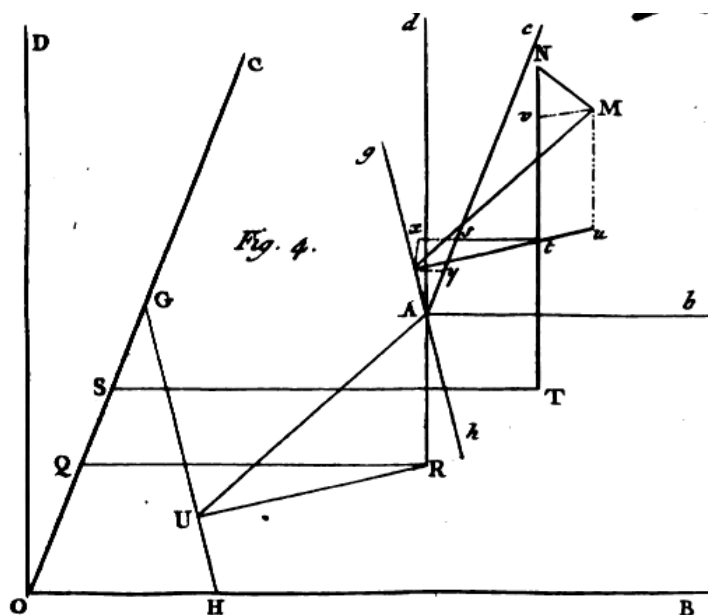


Figura 8: *Figura 4 de Meusnier.*

Sigui A un punt de l'element en qüestió, i suposem que el pla que li és tangent talla, seguint GH , el pla horitzontal BOC . Imaginem, pel punt A , un pla vertical perpendicular a GH ; sigui U el punt on aquest pla talla aquesta línia i siguin AU, UR les interseccions d'aquest pla amb el pla tangent i amb el pla BOC , respectivament. L'angle AUR mesura la inclinació del pla tangent.

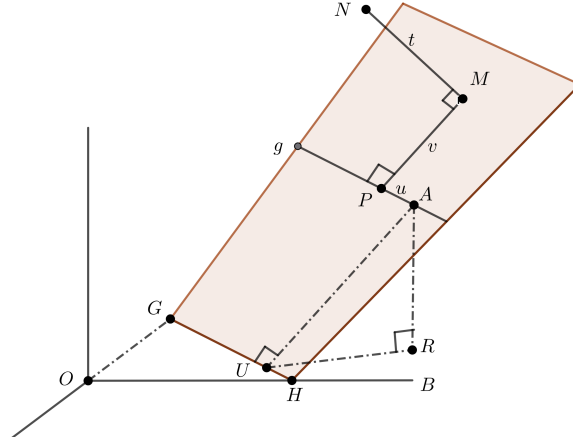


Figura 9: Aclariment a la figura 4 de Meusnier.

Sigui N un altre punt de la superfície, a partir del qual baixem la perpendicular NM sobre el pla tangent en A ; pel punt A tracem Ag paral·lela a GH i des del punt M , sigui MP perpendicular a AG .³³ Afirmo que AP, PM, MN són tres coordenades perpendiculars entre elles, mitjançant les quals el punt N queda referit al pla tangent. Les podem prendre, doncs, com les coordenades de què ens hem servit fins ara, i donar-los les mateixes denominacions: $AP = u, PM = v, MN = t$.

Siguin, a més,

$$\begin{aligned} OQ &= x; & QR &= y; & RA &= z; \\ OS &= x'; & ST &= y'; & TN &= z'; \\ \angle OGH &= \alpha; & \angle AUR &= \omega. \end{aligned}$$

³³S'enten que P pertany a la recta AG .

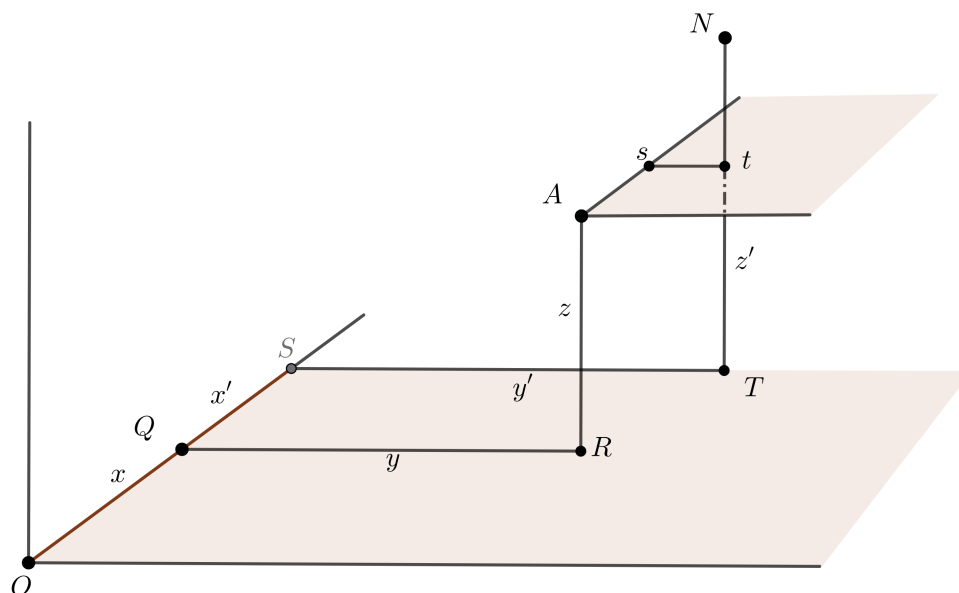


Figura 10: Aclariment a la figura 4 de Meusnier.

Transportem l'origen a A ; per fer-ho, tracem pel punt A els eixos Ab, Ac, Ad paral·lels als primers, de manera que les coordenades del punt arbitrari N , respecte d'aquests eixos, són $As = x' - x$, $st = y' - y$, $tN = z' - z$.

Tracem, des del punt P , en el pla horitzontal bAc , la recta Ptu , que es pot considerar com la projecció horitzontal de PM ³⁴. Tracem pel punt M la vertical MF i, en el pla vertical MPF , l'horitzontal ME .³⁵ Pel punt P tracem Px, Py paral·lels als eixos Ac, Ab , respectivament, i prolonguem st fins que talli la recta Px en el punt x .³⁶

³⁴És fonamental remarcar que les projeccions ortogonals t , de N , i u , de M sobre el pla horitzontal passant per P , estan alineades amb P . Això és degut al fet que, essencialment, estem tallant dos plans ortogonals: el pla horitzontal i el pla PMN .

³⁵He hagut de canviar lleugerament la notació de Meusnier, ja que en aquest paràgraf apareixen les mateixes lletres per designar coses diferents i l'original és difícil de seguir. Per exemple t designa a cops una coordenada i a cops un punt.

³⁶L'angle tPA de la figura 11 és recte.

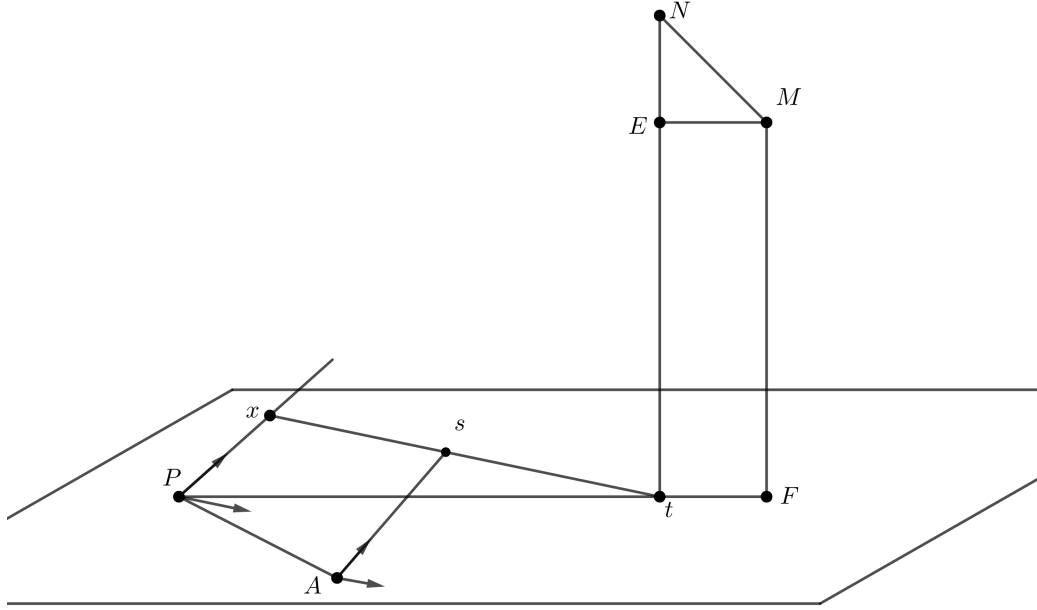


Figura 11: Aclariment a la figura 4 de Meusnier.

Dit tot això, sigui $dz = p dx + q dy$ l'equació de la nostra superfície i suposem que tenim a més $dp = m dx + n dy$; $dq = n dx + s dy$. Es tindrà també

$$\begin{aligned} dz' &= p' dx' + q' dy', \\ dp' &= m' dx' + n' dy', \\ dq' &= n' dx' + s' dy'; \end{aligned}$$

per tant, suposant dx', dy' constants,³⁷ es tindrà

$$ddz' = m' dx'^2 + 2n' dx' dy' + s' dy'^2. \quad (11)$$

³⁷ Podem pensar que el punt $N = (x', y', z')$ s'aproxima al punt $A = (x, y, z)$ tot movent-se per sobre la superfície. Per això, posarem $N(s) = (x'(s), y'(s), z'(s))$ i pensarem que tenim una corba $N(s)$ sobre la superfície, amb $N(0) = A$, i en calcularem $N'(0)$.

Com que $z' = z(x', y')$, la seva restricció a la corba $N(s)$ és $z'(s) = z(x'(s), y'(s))$, la qual, derivada respecte de s en $s = 0$, dona

$$\frac{dz'}{ds} \Big|_{s=0} = \frac{\partial z}{\partial x}(x'(0), y'(0)) \frac{dx'(s)}{ds} \Big|_{s=0} + \frac{\partial z}{\partial y}(x'(0), y'(0)) \frac{dy'(s)}{ds} \Big|_{s=0} = p \frac{dx'(s)}{ds} \Big|_{s=0} + q \frac{dy'(s)}{ds} \Big|_{s=0},$$

és a dir, $dz' = p dx' + q dy'$, i per tant $p = p'$, $q = q'$. Anàlogament, es veu que $m = m'$, $n = n'$, $s = s'$.

Ara els triangles NME , MPF donen,³⁸

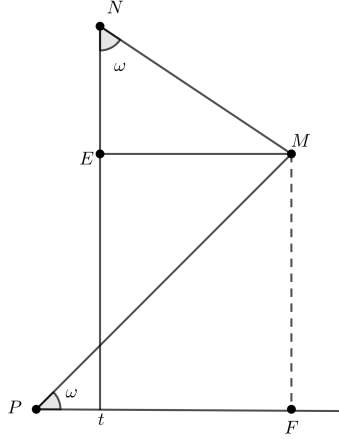


Figura 12: Aclariment a la figura 4 de Meusnier.

$$NE = MN \cos(\angle MPF) = t \cos \omega,$$

$$ME = MN \sin(\angle MPF) = t \sin \omega,$$

$$MF = MP \sin(\angle MPF) = v \sin \omega,$$

$$PF = MP \cos(\angle MPF) = v \cos \omega,$$

per tant³⁹ $Pt = PF - tF = PF - ME = v \cos \omega - t \sin \omega$.

Tenim, a més, pels triangles Ptx , PAy ,

A més, suposarem que aquesta corba és del tipus

$$x'(s) = x + as,$$

$$y'(s) = y + bs,$$

$$z'(s) = z(x + as, y + bs).$$

En particular $dx'/ds = a$, $dy'/ds = b$, cosa que justifica l'expressió de Meusnier quan diu que pot suposar dx' , dy' constants. Denotem per $(u(s), v(s), t(s))$ les coordenades del punt $N(s)$ respecte de la referència d'origen A , adaptada al pla tangent. El vector $N'(0)$ pertany al pla tangent en A , i per tant la seva tercera coordenada respecte d'aquesta referència és zero, és a dir, $\frac{dt}{ds} \Big|_{s=0} = 0$, equació que Meusnier escriu més endavant com $dt = 0$.

³⁸Observem que els angles MNE , MPF són iguals a AUR , és a dir, a ω .

³⁹Meusnier no fa cap aclariment en aquest punt, però a la secció §30 analitza la primera igualtat $NE = t \cos \omega$ en funció dels signes de t i NE . Aquí, però, cal tenir en compte que t és

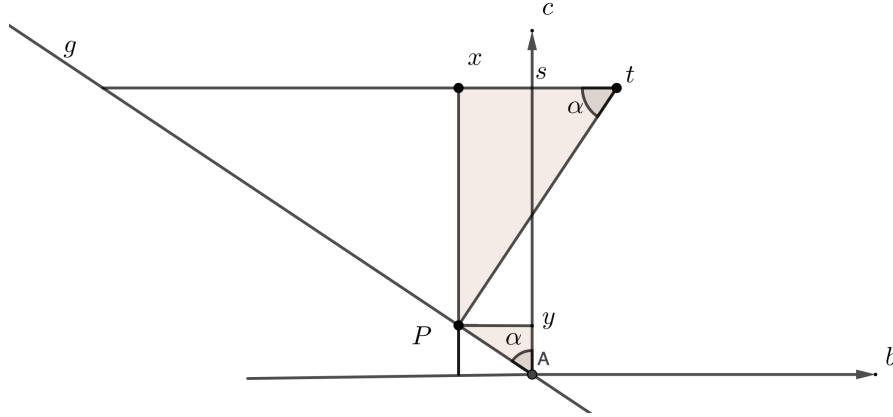


Figura 13: Aclariment a la figura 4 de Meusnier.

$$\begin{aligned}
 Px &= Pt \sin \alpha = (v \cos \omega - t \sin \omega) \sin \alpha, \\
 tx &= Pt \cos(\alpha) = (v \cos \omega - t \sin \omega) \cos \alpha, \\
 Py &= AP \sin \alpha = u \sin \alpha, \\
 Ay &= AP \cos \alpha = u \cos \alpha,
 \end{aligned}$$

per tant, com que

$$\begin{aligned}
 As &= x' - x = Px + Ay, \\
 st &= y' - y = tx - Py, \\
 Nt &= z' - z = NE + MF,
 \end{aligned}$$

es tindrà⁴⁰

una coordenada, no pas una distància, que és el que hem de suposar que està fent quan diu que aquestes fórmules provenen de considerar un cert triangle que els té per costats. Però, el que passa és que t pren valor positiu quan N es troba per sobre del pla tangent, i en aquest cas, NE és també positiu, en el sentit que N està per sobre de E al llarg de la vertical comuna. Crec que l'estudi de la secció §30 hauria estat més pertinent aquí.

⁴⁰Aquestes equacions, que Meusnier obté a partir d'un dibuix força complicat, es poden deduir fàcilment si observem que, per superposar una referència amb l'altra, només cal compondre dos gir i una translació, de manera que l'origen de coordenades es traslladi al punt A , i el pla $z = 0$ coincideixi amb el pla tangent a la superfície en A . Les equacions (12) són equivalents

$$\begin{aligned}
x' - x &= (v \cos \omega - t \sin \omega) \sin \alpha + u \cos \alpha, \\
y' - y &= (v \cos \omega - t \sin \omega) \cos \alpha - u \sin \alpha, \\
z' - z &= t \cos \omega + v \sin \omega.
\end{aligned} \tag{12}$$

Diferenciem aquestes equacions tractant x, y, z com a constants, per indicar que considerem el punt A com a fix. Això fa que les equacions obtingudes facin referència únicament a l'element de superfície que estem estudiant, és a dir, als punts de la superfície que es troben a l'entorn del punt A . Suposem, per tant, que el punt N és infinitament pròxim a A , i en conseqüència, fem⁴¹

$$\begin{aligned}
dt &= 0, & p' &= p, & q' &= q, \\
m' &= m, & n' &= n, & s' &= s.
\end{aligned}$$

Tindrem

$$\begin{aligned}
dx' &= dv \cos \omega \sin \alpha + du \cos \alpha, \\
dy' &= dv \cos \omega \cos \alpha - du \sin \alpha, \\
dz' &= dv \sin \omega, \\
ddx' &= [ddv \cos \omega - ddt \sin \omega] \sin \alpha + ddu \cos \alpha, \\
ddy' &= [ddv \cos \omega - ddt \sin \omega] \cos \alpha - ddu \sin \alpha, \\
ddz' &= ddt \cos \omega + ddv \sin \omega,
\end{aligned}$$

però essent dx', dy' constants, es té $ddx' = 0, ddy' = 0$.⁴² Això implica

$$ddv \cos \omega - ddt \sin \omega = 0,$$

a

$$\begin{pmatrix} x' - x \\ y' - y \\ z' - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & -\sin \omega \\ 0 & \sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ t \end{pmatrix}.$$

Hi ha un error a l'article de Meusnier que canvia v per u a la darrera equació

⁴¹Vegeu la nota al peu de pàgina 37, pàgina 33.

⁴²Per calcular les diferències segones observem que

$$\begin{aligned}
\frac{dx'}{ds} &= a = \left(\frac{dv}{ds} \cos \omega - \frac{dt}{ds} \sin \omega \right) \sin \alpha + \frac{du}{ds} \cos \alpha, \\
\frac{dy'}{ds} &= b = \left(\frac{dv}{ds} \cos \omega - \frac{dt}{ds} \sin \omega \right) \cos \alpha - \frac{du}{ds} \sin \alpha, \\
\frac{dz'}{ds} &= \frac{dt}{ds} \cos \omega + \frac{dv}{ds} \sin \omega,
\end{aligned}$$

que substituït a la darrera equació ens dona

$$ddz' = \frac{ddt}{\cos \omega}.$$

Posant a l'equació (11) els valors de ddz', dx', dy' obtenim⁴³

$$\begin{aligned} ddt &= du^2 \left[m \cos^2 \alpha - 2n \sin \alpha \cos \alpha + s \sin^2 \alpha \right] \cos \omega \\ &+ 2du dv \left[n(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (m - s) \sin \alpha \cos \alpha \right] \cos^2 \omega \\ &+ dv^2 \left[m \sin^2 \alpha + 2n \sin \alpha \cos \alpha + s \cos^2 \alpha \right] \cos^3 \omega, \end{aligned}$$

equació que comparada amb l'equació (2)

$$ddt = e du^2 + 2f du dv + g dv^2,$$

ens dona

$$\begin{aligned} e &= (m \cos^2 \alpha - 2n \sin \alpha \cos \alpha + s \sin^2 \alpha) \cos \omega, \\ f &= ((m - s) \sin \alpha \cos \alpha + n(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)) \cos^2 \omega, \\ g &= (m \sin^2 \alpha + 2n \sin \alpha \cos \alpha + s \cos^2 \alpha) \cos^3 \omega. \end{aligned}$$

Però posant atenció al fet que els angles ω, α depenen de la posició del pla tangent, tenim⁴⁴

$$\begin{aligned} \cos \omega &= \frac{1}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, & \sin \omega &= \frac{\sqrt{p^2 + q^2}}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \\ \cos \alpha &= \frac{q}{\sqrt{p^2 + q^2}}, & \sin \alpha &= \frac{p}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \end{aligned}$$

i per tant

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x'}{ds^2} \Big|_{s=0} &= 0 = \left(\frac{d^2 v}{ds^2} \cos \omega - \frac{d^2 t}{ds^2} \sin \omega \right) \sin \alpha + \frac{d^2 u}{ds^2} \cos \alpha, \\ \frac{d^2 y'}{ds^2} \Big|_{s=0} &= 0 = \left(\frac{d^2 v}{ds^2} \cos \omega - \frac{d^2 t}{ds^2} \sin \omega \right) \cos \alpha - \frac{d^2 u}{ds^2} \sin \alpha, \\ \frac{d^2 z'}{ds^2} \Big|_{s=0} &= \frac{d^2 t}{ds^2} \cos \omega + \frac{d^2 v}{ds^2} \sin \omega. \end{aligned}$$

⁴³Recordem $m' = m, n' = n, s' = s$.

⁴⁴Només cal observar que la normal unitària en A al pla tangent és $v = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}(-q, -p, 1)$ i ω és l'angle entre els vectors $(0, 0, 1)$ i v ; i α és l'angle entre els vectors $(-1, 0)$ i $(-q, p)$. Amb $p = z_x(a, b)$, $q = z_y(a, b)$.

i els valors de e, f, g esdevindran:

$$\begin{aligned} e &= \frac{mq^2 - 2npq + sp^2}{(p^2 + q^2)\sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \\ f &= \frac{(m - s)pq - n(p^2 - q^2)}{(p^2 + q^2)(1 + p^2 + q^2)}, \\ g &= \frac{mp^2 + 2npq + sq^2}{(p^2 + q^2)(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}. \end{aligned} \quad C.Q.F.T.$$

§29. Els valors que acabem de trobar per a e, f, g donen⁴⁵

$$e + g = \frac{m(1 + q^2) - 2npq + s(1 + p^2)}{(1 + p^2 + q^2)^{3/2}}, \quad eg - f^2 = -\frac{n^2 - ms}{(1 + p^2 + q^2)^4}.$$

Escrivim per abreujar

$$\begin{aligned} K &= \sqrt{1 + p^2 + q^2}, \\ U &= m(1 + q^2) - 2npq + s(1 + p^2), \\ V &= n^2 - ms, \end{aligned}$$

i tindrem

$$e + g = \frac{U}{K^3}, \quad eg - f^2 = -\frac{V}{K^4}. \quad (13)$$

Però els valors dels radis de curvatura són

$$\begin{aligned} r &= \frac{2}{e + g + \sqrt{(e + g)^2 - 4(eg - f^2)}}, \\ \rho &= \frac{2}{e + g - \sqrt{(e + g)^2 - 4(eg - f^2)}}, \end{aligned}$$

o, posant per a $e + g$ i $eg - f^2$ els valors que acabem de trobar,

$$\begin{aligned} r &= \frac{2K^3}{U + \sqrt{U^2 + 4VK^2}}, \\ \rho &= \frac{2K^3}{U - \sqrt{U^2 + 4VK^2}}. \end{aligned} \quad (14)$$

⁴⁵Està escrivint, doncs, en llenguatge actual, la traça i el determinant de l'endomorfisme de Weingarten.

§30. Aquí apareix una ambigüitat que cal resoldre: K és una quantitat radical, per tant, el seu signe no està determinat. Tanmateix, és evident que aquesta quantitat $K = \sqrt{1 + p^2 + q^2}$ només intervé en els càlculs a través de l'expressió $\cos \omega = 1/K$. Ara bé, és fàcil veure que $\cos \omega$ ha de representar sempre una quantitat positiva.⁴⁶ En efecte, si N està per sobre del pla tangent, o el que és el mateix, t és positiu, aleshores Nt serà més gran que MF , és a dir, NE , que és l'excés de Nt sobre MF , serà positiu. De manera anàloga, quan t sigui negatiu, Nt serà menor que MF , i per tant NE serà negatiu.

Però hem vist que $NE = t \cos \omega$, i per tant $\cos \omega$ s'ha de prendre sempre com a positiu; en conseqüència, K també s'ha de prendre com a positiva.

§31. Un cop transformades les expressions dels radis de curvatura, cal fer la mateixa operació amb les equacions de l'eix de rotació que vam donar a la secció §11. Per això, remarquem que, si denotem per x', y', z' les coordenades de cada punt d'aquest eix respecte dels eixos principals OB, OC, OD i per u, v, t les coordenades respecte del pla tangent, es compleixen les equacions (12); però aquestes equacions, un cop substituïm el sinus i el cosinus pels seus valors, donen

$$\begin{aligned} u &= \frac{q(x' - x) - p(y' - y)}{\sqrt{p^2 + q^2}}, \\ v &= \frac{(z' - z)(p^2 + q^2) + p(x' - x) + q(y' - y)}{\sqrt{p^2 + q^2} \sqrt{1 + p^2 + q^2}}, \\ t &= \frac{z' - z - p(x' - x) - q(y' - y)}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}. \end{aligned}$$

Posant aquestes expressions a les equacions de l'eix (9), així com els valors transformats e, f, g , obtindrem les següents equacions per determinar els dos eixos que corresponen a un element donat:⁴⁷

⁴⁶Aquí Meusnier no és del tot coherent, ja que a la secció §28 ha definit ω com un angle d'un triangle rectangle, i per tant ω és agut i el seu cosinus positiu. L'argument que segueix indica que, per mantenir les igualtats $Nt = MF + NE$ i $NE = t \cos \omega$, quan t és una coordenada i no una distància, cal considerar NE com a negativa quan t és negativa. Cal observar que Meusnier utilitza la mateixa lletra t per a conceptes diferents, però el significat queda clar pel context. Vegeu la figura de la pàgina 34 i la nota al peu de pàgina 39 de la pàgina 35.

⁴⁷Hem usat la relació $K^6((e - g)^2 + 4f^2) = U^2 + 4VK^2$ que es dedueix de les equacions (13), i del càlcul

$$e - g = \frac{U}{K^3} - \frac{2(mp^2 + 2npq + sq^2)}{(p^2 + q^2)K^3}.$$

$$(z' - z - p(x' - x) - q(y' - y))(U \pm \sqrt{U^2 + 4VK^2}) = 2K^4,$$

$$\begin{aligned} & \frac{(z' - z)(p^2 + q^2) + p(x' - x) + q(y' - y)}{q(x' - x) - p(y' - y)} = \\ & = \frac{2(mp^2 + 2npq + sq^2) - (p^2 + q^2)(U \pm \sqrt{U^2 + 4VK^2})}{2(m - s)pq - n(p^2 - q^2)}, \end{aligned}$$

en les quals x, y, z són les coordenades de l'element al qual pertany l'eix en qüestió.⁴⁸

Mitjançant aquestes fórmules es podrà conèixer la curvatura d'una superfície en qualsevol punt, substituint p, q, m, n, s pels seus valors, que es determinen a partir de l'equació de la superfície i les seves derivades. Creiem innecessari multiplicar els exemples; per això, ens conformarem amb el següent.

EXEMPLE

§32. *Aplicar les fórmules dels radis de curvatura a una superfície de revolució.*

Siguin OB, OC, OD (fig.5) els tres eixos de coordenades i suposem a més que

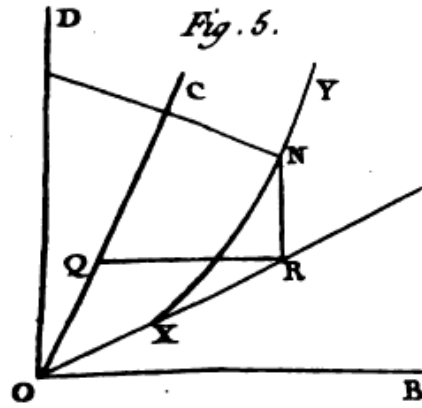


Figura 14: Figura 5 de Meusnier.

⁴⁸Observem que aquestes dues equacions donen, com intersecció de dos plans, els dos eixos buscats.

OD sigui l'eix al voltant del qual està generada la superfície que considerem. Sigui N el punt en qüestió, i anomenem les seves coordenades OQ, QR, RN , per x, y, z respectivament. Dit això, l'equació de les superfícies de revolució és $z = f(x^2 + y^2)$, i per tant, $dz = P(x dx + y dy)$, $dP = Q(x dx + y dy)$ on P i Q funcions de $x^2 + y^2$;⁴⁹ així (§28)

$$\begin{aligned} p &= P x, \\ q &= P y, \\ m &= P + Q x^2, \\ n &= Q x y, \\ s &= P + Q y^2. \end{aligned}$$

Ara, tot substituint aquests valors de p, q, m, n, s a les expressions de U, V, K , obtindrem les expressions dels radis de curvatura. Tanmateix, per abreujar, reprenem directament els valors

$$r = \frac{2}{e + g + \sqrt{(e - g)^2 + 4f^2}}, \quad \rho = \frac{2}{e + g - \sqrt{(e - g)^2 + 4f^2}},$$

i posarem a e, f, g els valors que acabem de trobar. Obtindrem

$$e = \frac{P}{\sqrt{1 + P^2(x^2 + y^2)}}, \quad f = 0, \quad g = \frac{P + Q(x^2 + y^2)}{(1 + P^2(x^2 + y^2))^{3/2}},$$

per tant

$$r = \frac{1}{e} = \frac{\sqrt{1 + P^2(x^2 + y^2)}}{P}, \quad \rho = \frac{1}{g} = \frac{(1 + P^2(x^2 + y^2))^{3/2}}{P + Q(x^2 + y^2)},$$

expressions que només depenen de P i Q , és a dir, de la naturalesa de la corba generatriu.⁵⁰

Tallem la nostra superfície per un pla que passi per l'eix i pel punt N . La secció XNY (fig.5) no és altra cosa que la corba generatriu, i per tant es poden

⁴⁹ Com que $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ obtenim $P(x, y) = 2f'(x^2 + y^2)$, $Q(x, y) = 4f''(x^2 + y^2)$. A continuació compara les expressions que acaba d'obtenir amb les expressions $dz = p dx + q dy$ i $ddz = dP(x dx + y dy) + P(dx^2 + dy^2) = Q(x dx + y dy)^2 + P(dx^2 + dy^2) = m dx^2 + 2n dx dy + s dy^2$.

⁵⁰ Vol dir que P, Q depenen únicament de la funció f que descriu la superfície de revolució. Per exemple, una corba generatriu d'aquesta superfície $z = f(x^2 + y^2)$, és la corba del pla $x = 0$, donada per $(t, f(t^2))$.

considerar OR, RN com a coordenades. Sigui $OR = u$, tindrem $x^2 + y^2 = u^2$, i les equacions $dz = P(x dx + y dy)$, $dP = Q(x dx + y dy)$ es transformaran en $dz = P u du$, $dP = Q u du$ i, per tant,

$$ddz = du^2(P + Qu^2).$$

(Tractem du com a constant, ja que al llarg de la línia OR es té $du = \sqrt{dx^2 + dy^2}$, expressió que és constant perquè s'ha suposat dx i dy constants).⁵¹ Si denotem per ds l'element de longitud de la corba, tindrem⁵²

$$ds = du\sqrt{1 + P^2u^2}.$$

Tot això ens dona

$$P = \frac{dz}{u du}, \quad P + Qu^2 = \frac{ddz}{du^2}, \quad \sqrt{1 + P^2u^2} = \frac{ds}{du},$$

per tant,

$$r = \frac{\sqrt{1 + P^2u^2}}{P} = \frac{u ds}{dz}, \quad \rho = \frac{(1 + P^2u^2)^{3/2}}{P + Qu^2} = \frac{ds^3}{du d dz},$$

però $\frac{u ds}{dz}$ és evidentment la normal NS i $\frac{ds^3}{du d dz}$ el radi de curvatura de la corba XY en el punt N .⁵³ Per tant, *els dos radis de curvatura en un punt qualsevol d'una superfície de revolució són: l'un, el radi de curvatura de la corba generatriu en el mateix punt; l'altre la longitud de la porció de la normal compresa entre la corba i l'eix de rotació.*

§33. Els caràcters analítics dels diferents estats de les superfícies que hem donat a la secció §27 són també susceptibles de ser transformats respecte de

⁵¹A partir de l'expressió $ddz = Q(x dx + y dy)^2 + P(dx^2 + dy^2)$ obtinguda a la nota al peu de pàgina 49, pàgina 41, i tenint en compte que $u du = x dx + y dy$ obtenim $ddz = Q(udu)^2 + P(dx^2 + dy^2)$. Acceptant que $du^2 = dx^2 + dy^2$, s'obté el resultat. Per verificar aquesta última igualtat, observem que el pla amb què hem tallat la superfície té equació $y = \lambda x$, de manera que $u = \sqrt{1 + \lambda^2}x$, $dy = \lambda dx$, i per tant $du^2 = (1 + \lambda^2)dx^2 = dx^2 + dy^2$.

⁵²L'equació de la corba XNY , respecte de les coordenades OR, RN introduïdes en el pla XNY , és $(u, f(u^2))$, de manera que el seu vector tangent és $(1, f'(u^2)2u) = (1, Pu)$ i, per tant, té norma $\sqrt{1 + P^2u^2}$.

⁵³La recta normal a la corba $(u, f(u^2))$ és $(u, f(u^2)) + \lambda(-Pu, 1)$. Aquesta recta talla l'eix z en $(0, f(u^2) + 1/P)$. I la distància entre aquests dos punts és, doncs, $\sqrt{u^2 + (1/P)^2} = r$. Probablement Meusnier raona a partir del dibuix

qualsevol sistema d'eixos. Per a això, cal remarcar que, com que K és una quantitat positiva, les expressions $e + g$ i U tenen sempre el mateix signe, així com $f^2 - eg$ i V .⁵⁴ Per tant, una superfície és⁵⁵

Còncava.....	$V < 0$, i $U > 0$.
Convexa.....	$V < 0$, i $U < 0$.
Convex-Còncava.....	$V > 0$, i $U < 0$.
Còncav-Convexa.....	$V > 0$, i $U > 0$.

Passem ara a aplicar la nostra teoria a la resolució de diversos problemes.

Està suficientment demostrat, per tot el que precedeix, que no es pot afirmar, en general, que un element qualsevol d'una superfície es pugui considerar com una porció d'esfera, idea força comuna entre aquells que s'inicien en l'estudi d'aquesta matèria. Per tal que això fos cert, caldria que els dos radis de curvatura fossin sempre iguals, cosa que és evident que no passa. Ara bé, és possible que existeixi una classe de superfícies que gaudeixin d'aquesta propietat, i és interessant conèixer-la. Per això, plantejarem el problema següent.

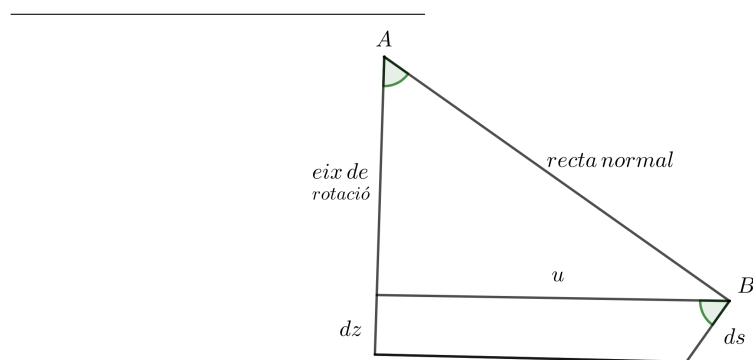


Figura 15: *Longitud de la normal.*

que mostra aquesta igualtat ($dz/ds = u/AB$) gairebé sense cap càlcul. Només hem de pensar que la corba passa pel punt B i que ds és un petit segment de la tangent de la corba en B.

Sobre l'expressió del radi de curvatura, vegeu la nota al peu de pàgina 30, pàgina 23.

⁵⁴Vegeu §29.

⁵⁵Vegeu alguns exemples a la secció E de l'Apèndix.

PROBLEMA III

§34. *Determinar quines són les superfícies que tenen els dos radis de curvatura iguals.*

SOLUCIÓ. Les expressions dels dos radis de curvatura només difereixen pel signe d'un mateix radical en una expressió i l'altra. Per tant, si aquest radical fos nul, les expressions serien iguals. Així, segons el que es va dir a la secció §29, la condició és

$$V^2 + 4VK^2 = 0,$$

que és l'equació de la classe de superfícies que cerquem.

Desenvolupant U , V i K , i integrant, si és possible, l'equació en derivades parcials que se'n deriva, obtindrem la solució del problema.

Tanmateix, una observació molt simple simplifica molt aquesta recerca. Recordem que el radical que apareix en les expressions inicials de r i ρ és (§9) $\sqrt{(e-g)^2 + 4f^2}$ i, per tant, la condició que cerquem es compleix si $(e-g)^2 + 4f^2 = 0$. Com que aquesta expressió és suma de dos quadrats, i només serà nul·la si cadascun dels termes és nul. Així, tenim les dues equacions $e = g$, $f = 0$. La condició $f = 0$ dona (§28) $(m-s)pq - n(p^2 - q^2) = 0$, d'on se'n dedueix

$$m = \frac{n(p^2 - q^2) + spq}{pq},$$

o bé

$$s = \frac{mpq - n(p^2 - q^2)}{pq}.$$

Substituïts successivament aquests valors a l'equació $e = g$, s'obtenen les relacions⁵⁶

$$\frac{n}{p} = \frac{sq}{1+q^2}, \quad \frac{n}{q} = \frac{mp}{1+p^2}.$$

Recordant que

$$m = \frac{dp}{dx}, \quad n = \frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}, \quad s = \frac{dq}{dy},$$

⁵⁶És un càlcul llarg. La primera substitució dona

$$\begin{aligned} & n \left[(p^2 - q^2) \frac{q}{p} - 2pq \right] + s(p^2 + q^2) \\ &= \frac{1}{1+p^2+q^2} \left[n \left((p^2 - q^2) \frac{p}{q} + 2pq \right) + s(p^2 + q^2) \right]. \end{aligned}$$

Separant termes en n i s s'obté $s(p^2 + q^2)^2 = n(1+q^2)(p^2 + q^2)^2 \frac{1}{pq}$ que condueix al resultat final.

les nostres equacions esdevenen⁵⁷

$$\frac{dp}{p} = \frac{q dq}{1+q^2}, \quad \frac{dq}{q} = \frac{p dp}{1+p^2},$$

on la primera derivada és respecte de y i la segona respecte de x .

Podem, doncs, integrar aquestes equacions de manera habitual, completant la integral de la primera amb una funció de x i la de la segona amb una funció de y .

Obtindrem, per aquest mètode,

$$p^2 X = 1 + q^2, \quad q^2 Y = 1 + p^2,$$

on X és funció de x i Y és funció de y . Deduïm d'això

$$p = \sqrt{\frac{Y+1}{XY-1}}, \quad q = \sqrt{\frac{X+1}{XY-1}}.$$

Ara, com que $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$, efectuant les derivades i simplificant s'obté

$$\frac{dX}{dx(X+1)^{1/2}} = \frac{dY}{dy(Y+1)^{1/2}}.$$

En aquesta igualtat, les funcions que depenen només de x no es barregen amb les que depenen només de y ; per tant, aquesta igualtat només pot tenir lloc si ambdós membres són iguals a una constant. Sigui $2A$ aquesta constant, tenim

$$\frac{dX}{2(X+1)^{1/2}} = A dx, \quad \frac{dY}{2(Y+1)^{1/2}} = A dy,$$

i integrant obtenint els valors de X i Y

$$X = \frac{1 - (Ax+B)^2}{(Ax+B)^2}, \quad Y = \frac{1 - (Ay+C)^2}{(Ay+C)^2},$$

on B i C són constants d'integració.

Posant ara aquests valors a les expressions de p i q , i recordant que $dz = p dx + q dy$ es té⁵⁸

$$A dz = \frac{(Ax+B)A dx + (Ay+C)A dy}{\sqrt{1 - (Ax+B)^2 - (Ay+C)^2}},$$

⁵⁷Es tracta de derivades parcials, com comenta Meusnier a continuació.

⁵⁸Meusnier hi posa un signe menys, que serà irrellevant i sembla que ho fa perquè la primitiva li surti positiva.

i, integrant, tindrem

$$Az + D = -\sqrt{1 - (Ax + B)^2 - (Ay + C)^2},$$

o bé

$$1 = (Ax + B)^2 + (Ay + C)^2 + (Az + D)^2.$$

Aquesta equació correspon a l'esfera; d'aquí se segueix que *només l'esfera té la propietat que els dos radis de curvatura siguin iguals*.⁵⁹

PROBLEMA IV

§35. *Entre totes les superfícies que es poden fer passar per un perímetre donat, format per una corba de doble curvatura, trobar aquella que tingui l'àrea mínima.*⁶⁰

SOLUCIÓ. Sigui A (fig. 6) un punt de l'element de la superfície requerida.

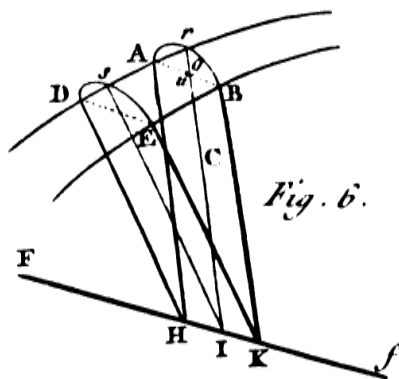


Figura 16: Figura 6 de Meusnier.

⁵⁹ Observem que del fet de suposar que els radis de curvatura són iguals en tots els punts (punts umbilicals) es dedueix que són constants.

⁶⁰ Troba, efectivament, que els radis de curvatura han de ser iguals i de signe contrari. Encara no es parlava de curvatura mitjana en aquell temps, però Meusnier demostra en aquesta secció que les superfícies que minimitzen l'àrea són les superfícies de curvatura mitjana zero. Va ser el primer en fer-ho. El famós article de Sophie Germain *Mémoire sur la courbure des surfaces*, on estudia la curvatura mitjana és de 1831 ([6]). Cal remarcar però, que avui dia s'anomenen superfícies minimals a les de curvatura mitjana zero, tot i que en la majoria dels casos no minimitzen el funcional àrea. Curvatura mitjana zero és equivalent al fet que la superfície representi un punt crític del funcional àrea, però s'ha d'estudiar la segona variació per saber si és mínim o punt d'inflexió. No pot ser màxim per arguments geomètrics.

Sigui Ff l'eix de rotació que correspon a aquest element; tracem dos plans infinitament pròxims perpendiculars l'un i l'altre a l'eix Ff i que comprenen entre ells l'element de superfície en qüestió.

Suposem que H, K són els punts on aquests plans tallen l'eix Ff , i que aquests plans determinen sobre la superfície les seccions UV, XY .

Fixant-se en la construcció pròpia de tot element de superfície, observem que les porcions infinitament petites AD i BE de les corbes UV i XY , preses en un entorn del punt A , es poden considerar com dos arcs de cercle del mateix radi, amb els seus centres en els punts H i K .

Ara dic que qualsevol porció de la zona compresa entre les corbes UV, XY ha de ser *minimum*. Per tant, si tracem per l'eix Ff dos nous plans infinitament pròxims que compranguin entre ells l'element considerat, cal que la porció de superfície limitada per aquests dos plans i per les corbes AD, BE tingui àrea mínima.

Dit això, siguin $ABHK, DEHK$ les porcions dels dos darrers plans compreses entre els primers. Dividim el segment HK en dues parts iguals en el punt I , i tracem la línia IR paral·lela a AH i BK . Existeix (§7), sobre aquesta línia, un punt C tal que, prenent-lo com a centre, es descriu un element de cercle ARB . Aquest petit arc de cercle, girant al voltant de Ff , generarà l'element de superfície del qual es tracta.⁶¹ Podem afirmar, doncs, que l'àrea del nostre element

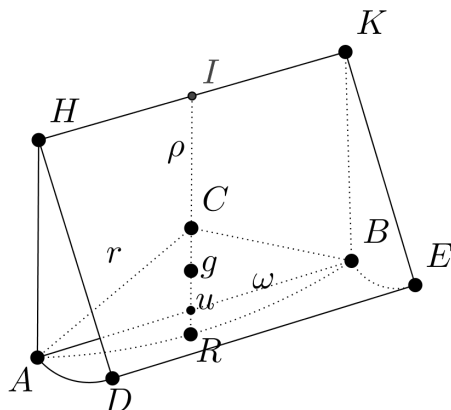


Figura 17: Aclariment a la figura 6 de Meusnier.

⁶¹Aquest és el punt clau i no prou ben justificat: no es calcula l'àrea de la superfície inicial, sinó la d'una superfície de revolució que l'aproxima.

de superfície és igual al producte de la longitud de l'arc ARB pel camí recorregut pel seu centre de gravetat dins de l'angle format pels plans AK, DK .⁶² Aquest producte ha de ser, doncs, un *minimum*; però el camí recorregut pel centre de gravetat és proporcional a la seva distància a l'eix. Sigui g aquest centre de gravetat; ha de complir-se que

$$ARB \times gI = \text{minimum}.$$

Dit això, és evident que RC , radi de l'arc generador, i rI , distància d'aquest arc a l'eix de rotació, són els dos radis de curvatura de l'element del qual es tracta. Prendrem, doncs, $RC = r$, $rI = \rho$. Siguin, a més, $BK = uI = a$, i $Bu = \omega$. Tindrem

$$ARB \times gI = ARB \times gC + ARB \times CI.$$

Però és conegut, per les fórmules d'estàtica⁶³ que $ARB \times gC = AB \times CR = 2\omega r$.

A més, si utilitzem la sèrie que expressa un arc de cercle en funció de la seva ordenada⁶⁴ i en prenem només els dos primers termes, ja que ω és infinitament petit (que és aquí l'ordenada de l'arc ARB , sent RU l'abscissa), tindrem

$$\text{arc } BR = r \alpha = r \cdot \arcsin(\omega/r) = r \left[\frac{\omega}{r} + \frac{\omega^3}{6r^3} \right] = \omega + \frac{\omega^3}{6r^2}.$$

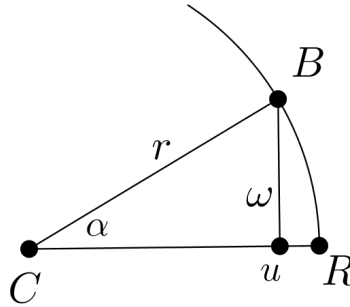


Figura 18: Aclariment a la figura 6 de Meusnier.

⁶²S'està emprant el Teorema de Pappus, que afirma que l'àrea de la superfície de revolució generada per una corba plana en girar al voltant d'una recta d'aquest pla és igual al producte de la longitud d'aquesta corba per la longitud de la trajectòria del seu centre de masses.

⁶³Vegeu la secció G de l'apèndix, pàgina 70.

⁶⁴Es refereix al desenvolupament de Taylor de la funció $\arcsin(x) = x + x^3/6 + \dots$

Per tant,

$$ARB = 2\omega + \frac{\omega^3}{3r^2},$$

a més $CI = \rho - r$; per tant,

$$\begin{aligned} ARB \times gI &= ARB \times gC + ARB \times CI = 2r\omega + (\rho - r)(2\omega + \frac{\omega^3}{3r^2}) \\ &= \omega \left[2\rho + \frac{(\rho - r)\omega^2}{3r^2} \right] = \text{minimum}; \end{aligned}$$

Per tant,⁶⁵

$$2d\rho + \omega^2 \frac{(d\rho - dr)r^2 - 2rdr(\rho - r)}{3r^4} = 0,$$

o bé

$$d\rho \left[6r^4 + r^2\omega^2 \right] + \omega^2 dr \left[r^2 - 2r\rho \right] = 0.$$

Però l'equació del cercle dona⁶⁶

$$uR = \frac{\omega^2}{2r}.$$

Així, com que $RI = BK + Ru$, tindrem

$$\rho = BK + \frac{\omega^2}{2r},$$

i, per consegüent

$$d\rho = -\frac{\omega^2 dr}{2r^2}.$$

⁶⁵ Les diverses superfícies que considerem per trobar la que té l'àrea mínima tindran la mateixa ω , i, per tant, per determinar quina té àrea mínima, igualem a zero la diferencial de l'anterior expressió de l'àrea.

⁶⁶ Aplicant el teorema de l'altura tenim que $\omega^2 = (2r - uR) \cdot uR$. Resolent aquesta equació de segon grau en uR obtenim

$$uR = r - \sqrt{r^2 - \omega^2} = r - r\sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{r}\right)^2},$$

que, usant el desenvolupament de Taylor de $\sqrt{1 - x^2} = 1 - x^2/2 + \dots$ ens dona $uR = \frac{\omega^2}{2r} + \dots$

Substituint aquest valor a l'equació anterior⁶⁷ i simplificant, obtenim $\rho + r = 0$, o $r = -\rho$. Per tant, *la superfície d'àrea mínima entre aquests límits té la propietat que en cada element els dos radis de curvatura són iguals en valor absolut però de signe contrari.*

Substituint a l'equació $r = -\rho$ els valors de r i ρ (14), obtenim $U = 0$, és a dir,

$$m(1 + q^2) - 2npq + s(1 + p^2) = 0,$$

equació que caracteritza la superfície en qüestió i que, traduïda en termes de derivades parcials, s'escriu com

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right) - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right) = 0,$$

que és la mateixa equació que s'obté pels mètodes ordinaris de *màxima i mínima*.

§36. No es coneix cap mètode general per integrar aquesta equació, i que jo sàpiga, l'única superfície coneguda que la satisfaci, en el cas d'un perímetre format per una corba plana, és el pla.

Tot i això, donaré dues superfícies diferents del pla que també compleixen la propietat de tenir radis de curvatura iguals en valor absolut, però de signe contrari.

§37a. Una d'aquestes superfícies es troba suposant que l'equació $m(1 + q^2) - 2npq + s(1 + p^2) = 0$ prové de les dues següents,

$$\begin{aligned}mq^2 - 2npq + sp^2 &= 0, \\m + s &= 0.\end{aligned}$$

Se sap que la primera d'aquestes equacions correspon a totes les superfícies generades pel moviment d'una recta horitzontal, com ha demostrat el Sr. Monge. Per tant, la superfície que satisfà simultàniament ambdues equacions és, dins la família de superfícies generades pel moviment d'una recta horitzontal, aquella que té, a més, àrea mínima.

La segona equació dona $m = -s$ o equivalentment $s = -m$; substituint l'un i l'altre valor a la primera equació s'obtenen les expressions

$$\begin{aligned}s(p^2 - q^2) - 2npq &= 0, \\m(q^2 - p^2) - 2npq &= 0,\end{aligned}$$

⁶⁷ En substituir, s'obté $-3r^2 - \omega^2/2 + r^2 - 2r\rho = -2r(r + \rho) - \omega^2/2 = 0$. Prenent ara el límit quan A tendeix a B (és a dir, quan ω tendeix a zero) obtenim que en el punt A , $r + \rho = 0$.

que es poden escriure com

$$\begin{aligned} dq(p^2 - q^2) - 2pq dp &= 0, \\ dp(q^2 - p^2) - 2pq dq &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Les derivades que intervenen en la primera equació es prenen fent variar només la variable y , i en la segona, només la variable x .⁶⁸

Com que aquestes dues equacions són homogènies, s'integren molt fàcilment.⁶⁹ Completant la integral de la primera equació amb una funció de x i la

⁶⁸És a dir, substitueix m per la derivada parcial de p respecte de x , n per la derivada parcial de q respecte de x o per la de p respecte de y i s per la derivada parcial de q respecte de y .

⁶⁹Meusnier en dona directament el resultat. Considerem la primera equació (la segona és resol de manera anàloga) i suposem x constant, de manera que es pot tractar com una equació diferencial ordinària.

Escrivim:

$$\frac{dq}{dy} = \frac{2pq}{p^2 - q^2} \frac{dp}{dy} = \frac{2q/p}{1 - (q/p)^2} \frac{dp}{dy}.$$

Fem el canvi de variable $u = q/p$, que implica:

$$\frac{dq}{dy} = p \frac{du}{dy} + u \frac{dp}{dy}.$$

Substituint aquesta expressió a l'equació anterior, obtenim

$$p \frac{du}{dy} = \left(\frac{2u}{1 - u^2} - u \right) \frac{dp}{dy} = \frac{u + u^3}{1 - u^2} \frac{dp}{dy}.$$

Això dona, per separació de variables:

$$\frac{1 - u^2}{u + u^3} du = \frac{dp}{p}.$$

Integrant s'arriba a:

$$p = X(x) \frac{u}{1 + u^2} = X(x) \frac{qp}{p^2 + q^2}$$

on $X(x)$ és la constant d'integració, ja que havíem suposat x constant. Per tant,

$$q(x, y)X(x) = p(x, y)^2 + q(x, y)^2.$$

En repetir aquest procediment sobre l'equació (15), suposant ara y constant obtenim

$$p(x, y)Y(y) = p(x, y)^2 + q(x, y)^2.$$

segona amb una funció de y , tenim

$$qX = p^2 + q^2, \quad pY = p^2 + q^2,$$

d'on s'obté

$$p = \frac{X^2 Y}{X^2 + Y^2}, \quad q = \frac{X Y^2}{X^2 + Y^2},$$

valors que, posats a l'equació $dz = p dx + q dy$ la transformen en

$$dz = \frac{X^2 Y dx + X Y^2 dy}{X^2 + Y^2}.$$

Ara bé, cal que es compleixi la condició de comptabilitat $\frac{dp}{dy} = \frac{dq}{dx}$ la qual, després de totes les reduccions, condueix a

$$-\frac{dX}{X^2 dx} = \frac{dY}{Y^2 dy},$$

equació en què les funcions de x no es barregen amb les de y , i, per tant, ambdós termes han de ser constants. Tenim, doncs,

$$-\frac{dX}{X^2 dx} = A, \quad \frac{dY}{Y^2 dy} = A,$$

d'on es dedueix

$$X^2 dx = -\frac{dX}{A}, \quad Y^2 dy = \frac{dY}{A}.$$

Substituint aquests valors a l'expressió de dz anterior resulta:

$$Adz = \frac{-Y dX + X dY}{X^2 + Y^2} = d(\arctan(-X/Y)).$$

A més, com que

$$-\frac{dX}{X^2} = A dx, \quad \frac{dY}{Y^2} = A dy,$$

integrant aquestes equacions obtenim

$$\frac{1}{X} = Ax + B, \quad -\frac{1}{Y} = Ay + C,$$

i així

$$-\frac{X}{Y} = \frac{Ay + C}{Ax + B}.$$

d'on

$$Az = F + \arctan \frac{Ay + C}{Ax + B}, \quad (16)$$

on F és una constant, i aquesta és l'equació de la superfície en qüestió.

Imaginem aquesta superfície tallada per un pla horitzontal, és a dir, prenem z constant; aleshores la quantitat $\frac{Ay+C}{Ax+B}$ també serà constant, d'on se segueix que la relació entre y i x es pot expressar mitjançant una equació de primer grau. Per tant, la secció que fa un pla horitzontal amb aquesta superfície és una línia recta: això confirma el que ja havíem dit, que aquesta superfície es pot generar pel moviment d'una recta horitzontal.

Com que la quantitat $\frac{Ay+C}{Ax+B}$ és constant quan z és constant, podem suposar que

$$\frac{Ay + C}{Ax + B} = Z,$$

on Z és una funció de z .⁷⁰

Dit això, considerem la recta generatriu en dues posicions infinitament pròximes, i busquem el punt on es tallen les projeccions d'aquestes dues posicions de la recta generatriu. Per fer-ho, observem que en el punt on es produeixi aquesta intersecció, z varia, però x i y romanen constants.⁷¹

Transformem, doncs, l'equació anterior en la forma $Ay + C = (Ax + B)Z(z)$ i la derivem fent variar només z ;⁷² s'obté $0 = (Ax + B)dZ$ cosa que només pot ocórrer si $Ax + B = 0$: se'n segueix, doncs, que també $Ay + C = 0$, i, per tant,

$$x = -\frac{B}{A}, \quad y = -\frac{C}{A},$$

són les coordenades del punt on es tallen les projeccions de dues generatrius infinitament pròximes.

⁷⁰Concretament $Z(z) = \tan(Az - F)$.

⁷¹És a dir, si tallem una generatriu a altura z_0 amb una infinitament pròxima, o bé ho fem a altura z_1 , els punts d'intersecció obtinguts tindran la mateixa x i la mateixa y .

⁷²Tallar rectes infinitament pròximes vol dir resoldre el sistema format per una de les rectes i la que té per coeficients les derivades dels coeficients de l'anterior. Cal observar també que per a cada valor de z , tenim una recta en el pla x, y ; per això Meusnier parla de la intersecció de les projeccions de les generatrius i no de la intersecció de les generatrius.

Substituint aquests valors de x, y a l'equació (16) obtenim

$$Az = F + \arctan \frac{y'}{x'}.$$

Tracem AM , que és la projecció de la recta generatriu quan passa per N , i denotem per u l'angle MAC ; és clar que $\arctan \frac{y'}{x'} = u$, i, per tant,

$$Az = F + u$$

és l'equació polar de la nostra superfície.

Dit això, és evident que els increments de z són proporcionals als de u ; per tant, la recta generatriu s'eleva al llarg de l'eix AF al mateix temps que gira al voltant del mateix eix, de manera que el seu moviment de rotació és proporcional al seu moviment d'ascensió.

Així, un punt qualsevol r d'aquesta recta descriu una hèlix $Gr tx$, que és la mateixa corba que la que forma la rosca d'un vis.

Quan la recta generatriu ha fet una volta completa, s'ha elevat una quantitat rx , que es pot anomenar el *pas* de l'hèlix. És clar que z augmenta en aquesta quantitat quan l'increment de u és igual a una volta completa. Així, si denotem per P el pas i per π la semicircumferència (entenent una volta completa com 2π), tindrem:

$$A(z + P) = F + u + \pi,$$

i, restant $Az = F + u$, obtenim $A = \frac{\pi}{P}$; d'on se segueix que la constant A depèn del pas de l'hèlix. Pel que fa a la constant F , és evident que depèn del punt G , on l'hèlix surt del pla horitzontal.

Se'n dedueix de tot això que, si prenem una porció qualsevol de la superfície que acabem de determinar, aquesta és un *minimum* entre els seus límits.

§37b. Un altre exemple de superfície d'àrea mínima és aquell en què la superfície és, alhora, una superfície de revolució. Per determinar de manera molt senzilla quina és la seva naturalesa, recordem que hem demostrat que, en una superfície de revolució, els dos radis de curvatura són: l'un el radi de curvatura de la corba generatriu en el punt considerat; l'altre la longitud de la normal a aquesta corba fins a l'eix de revolució.⁷³ Ara bé, una superfície d'extensió mínima ha de tenir els radis de curvatura iguals i de signe contrari. Cal, doncs, que la corba generatriu tingui la seva convexitat cap a l'eix de revolució, i que el seu radi de curvatura sigui, en tot moment, igual a la longitud de la normal.

⁷³Vegeu la secció §32.

Sigui, doncs, (fig. 8) AD l'eix de revolució, i CME la corba generatriu que

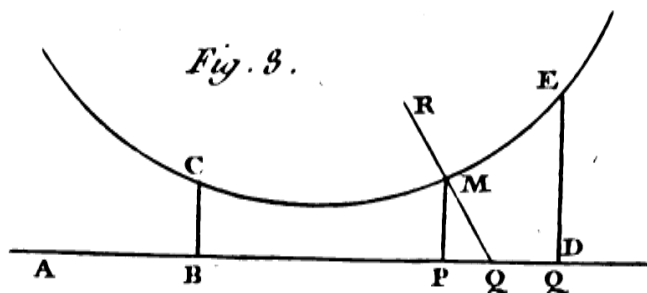


Figura 21: Figura 8 de Meusnier.

estem buscant. El seu radi de curvatura, en un punt qualsevol M , ha de ser igual a la normal MQ . Fem $AP = x$, $PM = y$ i denotem per ds l'element de longitud de la corba. Aleshores, el radi de curvatura és⁷⁴

$$RM = \frac{ds^3}{dx ddy},$$

i la normal

$$MQ = \frac{y ds}{dx},$$

de manera que, com que $RM = MQ$, tenim $\frac{ds^2}{ddy} = y$. Sigui $dy = p dx$; tindrem $ddy = dp dx$, i, per tant, la nostra equació esdevé

$$\frac{(1 + p^2) dx}{dp} = y,$$

o, posant $dx = \frac{dy}{p}$,

$$\frac{dt}{y} = \frac{p dp}{1 + p^2}.$$

Per tant, integrant, i completant la integral, s'obté

$$A^2 y^2 = 1 + p^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{dx^2},$$

⁷⁴Observem que $RM = \frac{(1+y'^2)^{3/2}}{y''}$, $MQ = y(1 + y'^2)^{1/2}$. Així doncs, cal resoldre l'equació diferencial $yy'' = 1 + y'^2$. Aleshores $y'' = p \cdot dp/dy$; això porta a la mateixa equació a què arriba Meusnier: $\frac{dy}{y} = \frac{p dp}{1+p^2}$. Vegeu la nota al peu de pàgina 30 a la pàgina 23.

d'on es dedueix l'equació

$$A dx = \pm \frac{A dy}{\sqrt{A^2 y^2 - 1}},$$

que, integrant, dona

$$Ax = B \pm \ln(Ay + \sqrt{A^2 y^2 - 1}). \quad (17)$$

Aquesta és l'equació de la catenària⁷⁵ referida a un eix horitzontal, que dista del seu punt més baix una quantitat $1/A$; és a dir, la catenària, en girar al voltant d'aquest eix, genera una superfície d'àrea mínima.

Si, donats dos cercles paral·lels, amb els centres sobre un mateix eix perpendicular a cadascun dels plans, es proposa fer passar per les dues circumferències la superfície d'àrea mínima, la qüestió queda resolta aquí: només cal prendre BD igual a la distància entre els dos cercles, BC , DE iguals als seus radis, i determinar les constants A i B (de l'equació (17)) de manera que la corba que hem trobat passi pels punts C i E . La superfície generada per la porció CME de la corba serà, evidentment, la que es demana.

Era fàcil de preveure que la corba CME havia de ser una catenària. Aquesta corba, que ha de ser, entre totes les que passen per C i E , la que genera la superfície de revolució d'àrea mínima, ha de tenir, amb més raó encara, aquesta propietat dins el conjunt de les isoperímetres. Ara bé, sabem⁷⁶ que la catenària és la corba que, d'entre totes les isoperímetres, genera la mínima superfície de revolució.

La corba que busquem ha de ser, doncs, una catenària; però calia resoldre el problema com hem fet, per saber, en particular, al voltant de quin eix ha de girar una catenària donada per tal de satisfer la qüestió.

PROBLEMA V

§38. *Trobar l'equació general de les superfícies desenvolupables.*

SOLUCIÓ. Una superfície desenvolupable es pot veure com generada pel moviment d'una línia recta, tal que dues posicions consecutives són contingudes en un mateix pla. Siguin, doncs, (fig. 9) MN , OP , QR tres posicions

⁷⁵Aïllant y , tenim $y = \frac{1}{A} \cosh(Ax - B)$.

⁷⁶No se'n dona cap referència.

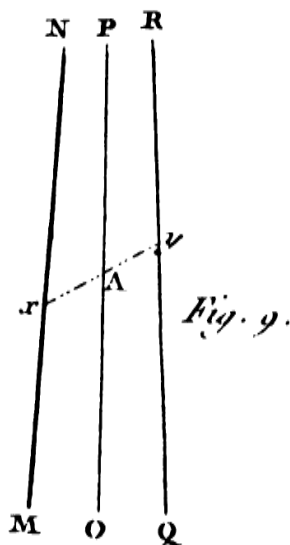


Figura 22: Figura 9 de Meusnier.

infinítament pròximes de la recta generatriu. És clar que, per un punt qualsevol A , es pot traçar sobre la superfície una línia recta OP ; hi ha, doncs, una direcció al llarg de la qual la curvatura és nul·la. Afegeixo que només n'hi ha una, ja que, si hi hagués una altra direcció xy en la qual la curvatura fos nul·la –és a dir, si els tres punts pròxims xAy estiguessin en una mateixa recta–, se'n seguiria que les tres rectes MN, OP, QR estarien en un mateix pla, i la superfície generada seria plana. Per tant, genèricament, en tota superfície desenvolupable hi ha una única direcció en què la curvatura és nul·la.

Per tant, un dels radis de curvatura és infinit (§25). Aquesta condició es tradueix en $V = 0$, o bé $n^2 - ms = 0$, és a dir:

$$\left(\frac{ddz}{dx dy}\right)^2 - \left(\frac{ddz}{dx^2}\right)\left(\frac{ddz}{dy^2}\right) = 0,$$

equació que és precisament la mateixa que va donar per primera vegada el Sr. Monge, en una excel·lent Memòria sobre ombres i penombres, llegida a l'Acadèmia l'any 1775 [11].

§39. Això ens dona l'ocasió de dir una paraula sobre les superfícies generades pel moviment d'una línia recta, però tals que dues posicions infinitament pròximes d'aquesta recta no estiguin en un mateix pla: superfícies que s'ano-

menen superfícies *guerxes*.⁷⁷

Per a aquest tipus de superfícies, afirmo que hi ha sempre, sobre un element qualsevol, dues direccions al llarg de les quals la curvatura és nul·la. És evident, d'entrada, que si es considera l'element al qual pertany A , la curvatura és nul·la en la direcció OP (figura 9).

Ara imaginem que, pel punt A , passen dos plans: l'un conté la línia MN , i l'altre, la línia QR . Aquests dos plans s'han de tallar en algun punt, ja que, si no es tallessin, les rectes infinitament pròximes MN i QR estarien en un mateix pla, contradient la hipòtesi. No es tallen, però, seguint OP , ja que llavors tant OP i MN estarien en un mateix pla, així com les rectes OP i QR , novament contra la hipòtesi.

Per tant, es tallen segons una línia xy (que fem passar pel punt A , ja que aquest punt és comú als dos plans). Però la seva intersecció xy talla, evidentment, les rectes MN i RQ , en algun lloc, als punts x i y . Existeixen, doncs, sobre les tres rectes MN , OP , QR , tres punts x , A , y alineats; per tant, la curvatura és també nul·la en la direcció xy .

Ara bé, hem vist (§22)⁷⁸ que, quan en un element de superfície hi ha dues direccions al llarg de les quals la curvatura és nul·la, els radis de curvatura són de signe contrari. Per tant: *En totes les superfícies guerxes, els dos radis de curvatura són de signe contrari.*

Es podrien fer moltes altres aplicacions d'aquesta teoria. Hi ha, entre d'altres, una qüestió important que en depèn molt directament: la de les inflexions i els retrocessos⁷⁹ de les superfícies corbes.

Ens en reservem la determinació per a una altra Memòria; però es pot remarcar, mentrestant, que les quantitats U i V , que intervenen gairebé exclusivament en les expressions que hem donat per als radis de curvatura, apareixen també en les equacions de les superfícies desenvolupables i de les d'àrea mí-

⁷⁷Gauches. Tant en aquesta secció com en l'anterior, Meusnier parla de les superfícies reglades, que són les que es poden parametritzar de la forma $\varphi(s, t) = \gamma(s) + t u(s)$, on $\gamma(s)$ i $t(s)$ són corbes de $\mathbb{R}^3$ amb $\|u(s)\| = 1$. Com que $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = 0$, el terme g de la segona forma fonamental és nul, i, per tant la curvatura de Gauss és negativa o nul·la. Si és nul·la, es tracta de les superfícies desenvolupables que Meusnier ha tractat a la secció 38. Si és negativa, les curvatures principals són de signe contrari: són les superfícies que Meusnier anomena guerxes. Cal remarcar, però, que el *Disquisitiones generales circa superficies curvas* de Gauss, on apareix la relació entre la curvatura intrínseca de la superfície i les curvatures principals, no es publicaria fins al 1827 ([5]).

⁷⁸Meusnier cita la secció §22, però en realitat això es dedueix de la fórmula d'Euler, que apareix a la secció §16.

⁷⁹Rebroussemens.

nima. Se'n segueix, doncs, que les propietats d'aquests dos tipus de superfície tenen, amb els resultats generals sobre la curvatura de superfícies, relacions que no poden sinó ser interessants de desenvolupar.⁸⁰

⁸⁰Just a continuació del treball de Meusnier, a la mateixa revista, es publica el treball de Monge sobre el mateix tema: *Mémoire sur les développées*, [12].

Apèndix

A Sobre la diferencial d'una funció

L'expressió $dt = U du + V dv$ que Meusnier utilitza a l'inici del seu treball, pàgina 480, es pot interpretar com una mesura de la variació que experimenta la funció a conseqüència de petits canvis en les variables.

En efecte, la fórmula de Taylor ens diu que:

$$t(u+h, v+k) - t(u, v) = \frac{\partial t(u, v)}{\partial u} \cdot h + \frac{\partial t(u, v)}{\partial v} \cdot k + \text{termes d'ordre superior.}$$

Com que h i k són els petits increments que han sofert les variables u i v , els denotem respectivament per $h = du$ i $k = dv$, i denotant $\Delta t = t(u+du, v+dv) - t(u, v)$ l'increment que experimenta la funció, l'anterior igualtat s'escriu com

$$\Delta t = U du + V dv + \text{termes d'ordre superior,} \quad (18)$$

i la part lineal d'aquest desenvolupament es denota per dt , és a dir,

$$dt = U du + V dv,$$

expressió emprada per Meusnier. Podem interpretar, doncs, dt com els termes de primer ordre en el desenvolupament de Taylor de la funció $t = t(u, v)$ en el punt (u, v) .

També es pot interpretar la notació de diferències simplement com la regla de la cadena. En efecte, quan considerem una corba $(u(s), v(s), t(u(s), v(s)))$ sobre la superfície i volem calcular-ne el vector tangent, hem de derivar, respecte del paràmetre s de la corba, la funció composta $t(u(s), v(s))$ i tenim

$$\frac{dt}{ds} = U(u(s), v(s)) \frac{du(s)}{ds} + V(u(s), v(s)) \frac{dv(s)}{ds}, \quad (19)$$

que s'escriu “simplificant el ds ” com $dt = U du + V dv$. Observem que aquesta igualtat també es dedueix de (18) fent:

$$\frac{dt}{ds} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{\Delta t(s)}{\Delta s},$$

on $\Delta t(s) = t(u(s + \Delta s), v(s + \Delta s)) - t(u(s), v(s))$.

B Sobre l'equació en diferències segones

Una manera d'entendre el càlcul de la diferencial segona ddt que fa Meusnier a la secció §1, pàgina 480, és introduir una corba sobre la superfície i calcular-ne la derivada segona. En efecte, de manera general, si considerem un funció de dues variables $t = t(u, v)$ i la valorem sobre una corba $(u(s), v(s))$, en derivar una vegada obtenim la igualtat (19), i en derivar una segona vegada:

$$\frac{d^2 t}{ds^2} = \frac{\partial U}{\partial u} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + \frac{\partial U}{\partial v} \frac{dv}{ds} \frac{du}{ds} + U \frac{d^2 u}{ds^2} + \frac{\partial V}{\partial u} \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \frac{\partial V}{\partial v} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 + V \frac{d^2 v}{ds^2}.$$

Si ara $t = t(u, v)$ és l'equació de la superfície referida al pla tangent, tal com fa Meusnier a la secció §1, i considerem una corba $(u(s), v(s))$ tal que $(u(0), v(0)) = (0, 0)$ i recordem que $U(0, 0) = V(0, 0) = 0$, aplicant la igualtat de Schwarz, l'equació anterior, a l'origen, esdevé

$$\frac{d^2 t}{ds^2} \Big|_{s=0} = \left[\frac{\partial U}{\partial u} \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2 \frac{\partial U}{\partial v} \frac{dv}{ds} \frac{du}{ds} + \frac{\partial V}{\partial v} \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 \right]_{s=0}.$$

Clàssicament aquesta igualtat s'escriu com

$$ddt = \frac{\partial U}{\partial u} \Big|_{s=0} du^2 + 2 \frac{\partial U}{\partial v} \Big|_{s=0} du dv + \frac{\partial V}{\partial v} \Big|_{s=0} dv^2, \quad (20)$$

que és precisament l'equació (2) de la secció §1 de Meusnier.

Cal observar que aquesta interpretació de ddt depèn de la corba $(u(s), v(s))$ que triem, amb la condició $(u(0), v(0)) = (0, 0)$, ja que en l'expressió que acabem de donar hi apareixen les components del vector tangent d'aquesta corba a l'origen.

C Corbes esfèriques

Recollim aquí un parell de resultats sobre corbes esfèriques que ens seran necessaris més endavant.

Lema C.1. *Sigui $v(s) = (x(s), y(s), z(s))$ una corba sobre l'esfera unitat, definida per $-\epsilon \leq s \leq \epsilon$ i $v(0) = (0, 0, 1)$. Sigui $\alpha(s)$ l'angle entre $v(0)$ i $v(s)$. Llavors, $z''(0) \leq 0$, i*

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0^+} \alpha'(s) &= +\sqrt{-z''(0)}, \\ \lim_{s \rightarrow 0^-} \alpha'(s) &= -\sqrt{-z''(0)}. \end{aligned}$$

En particular, si $z''(0) \neq 0$, la funció $\alpha(s)$ no es derivable en $s = 0$.

Demostració. El desenvolupament de Taylor de la funció $z(s)$ en $s = 0$ és

$$z(s) = 1 + \frac{z''(0)}{2}s^2 + O(s^3),$$

ja que $z(s)$ té un màxim a $s = 0$, i, per tant $z'(0) = 0$. A més, com que $z(s) \leq 1$, cal que $z''(0) \leq 0$. Observem que

$$v(s) \cdot v(0) = 1 + \frac{z''(0)}{2}s^2 + O(s^3) = \cos(\alpha(s)),$$

amb $0 \leq \alpha(s) \leq \pi$. Així,

$$\alpha(s) = \arccos(1 + \frac{z''(0)}{2}s^2 + O(s^3)).$$

Derivant respecte de s , obtenim

$$\begin{aligned} \alpha'(s) &= -\frac{z''(0)s + O(s^2)}{\sqrt{1 - (1 + \frac{z''(0)}{2}s^2 + O(s^3))^2}} = -\frac{s(z''(0) + O(s))}{|s|\sqrt{-z''(0) - O(s)}} \\ &= \frac{s}{|s|} \sqrt{-z''(0) - O(s)}. \end{aligned}$$

D'aquí es dedueix immediatament l'enunciat del lema. □

Lema C.2. Sigui $v(s)$ una corba sobre l'esfera unitat per $-\epsilon \leq s \leq \epsilon$, i sigui $\alpha(s)$ l'angle entre $v(0)$ i $v(s)$. Llavors

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \alpha'(s) = \left\| \frac{dv(s)}{ds} \Big|_{s=0} \right\|.$$

Demostració. Com que $v(s) \cdot v(s) = 1$, tenim $v'(s) \cdot v(s) = 0$ i, per tant

$$v'(s) \cdot v'(s) = -v''(s) \cdot v(s). \quad (21)$$

Derivant la igualtat $v(s) \cdot v(0) = \cos \alpha(s)$, tenim $v'(s) \cdot v(0) = -\sin \alpha(s) \alpha'(s)$, i tornant a derivar

$$v''(s) \cdot v(0) = -\cos \alpha(s) \alpha'(s)^2 - \alpha''(s) \sin \alpha(s). \quad (22)$$

Ara bé, com hem comentat en el Lema C.1, aquestes derivades només tenen sentit en punts on $s \neq 0$, ja que la funció $\alpha(s)$ no és derivable en $s = 0$.

Prenent límits per la dreta a l'equació (22) i tenint en compte que $\alpha''(s) = z''(s)/(1 - z'(s)^2)^{3/2}$, tindrem

$$v''(0) \cdot v(0) = -\alpha'(0)^2, \quad (23)$$

on ara sí que té sentit escriure $\alpha'(0)^2$ ja que, pel Lema C.1, $(\lim_{s \rightarrow 0^+} \alpha'(s))^2 = (\lim_{s \rightarrow 0^-} \alpha'(s))^2$.

Substituint (23) a (21), en $s = 0$, tenim $v'(0) \cdot v'(0) = \alpha'(0)^2$, i això implica, pel Lema C.1,

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \alpha'(s) = \|v'(0)\|.$$

com volíem demostrar. $\square$

D Sobre la curvatura de Meusnier

La fórmula (4) dona l'angle de la normal a la superfície en punts pròxims. Concretament, en termes de les coordenades u, v que usa Meusnier, proporciona l'angle entre la normal a la superfície en el punt de coordenades $(u, v) = (0, 0)$ i la normal en un punt infinitament pròxim, de coordenades (du, dv) .

Així doncs, en aquest context, les expressions du, dv s'interpreten com a valors petits de les variables u, v .

Tot i que Meusnier no parla explícitament de derivades, tot està a punt per poder donar la següent definició.

Definició D.1. *Sigui A un punt d'una superfície i v un vector unitari tangent a la superfície en aquest punt A . Sigui $\sigma(s)$ una corba sobre la superfície, parametritzada per l'arc, tal que $\sigma(0) = A$, $\sigma'(0) = v$. La curvatura de Meusnier en el punt A i direcció v , denotada $k_M(A, v)$, es defineix per*

$$k_M(A, v) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \alpha'(s),$$

on $\alpha(s)$ és l'angle entre el vector $v(s)$, normal a la superfície en el punt $\sigma(s)$, i el vector $v(0)$.

Observem que aquesta definició no depèn de la corba $\sigma(s)$ triada, sempre que es compleixin les condicions $\sigma(0) = A$, $\sigma'(0) = v$. En efecte, considerem la

superfície donada com a gràfica d'una funció $t = t(u, v)$ amb $t(0, 0) = 0$, i suposem que el pla tangent a la superfície en A , pres com a origen de coordenades, és el pla $t = 0$. Aleshores, la corba $\sigma(s)$ es pot escriure com $\sigma(s) = (u(s), v(s), t(s))$ amb $t(s) = t(u(s), v(s))$.

Denotant

$$U(s) = \frac{\partial t}{\partial u}(u(s), v(s)), \quad V(s) = \frac{\partial t}{\partial v}(u(s), v(s)),$$

el vector normal a la superfície en els punts de la corba és

$$\nu(s) = (-U(s), -V(s), 1) \frac{1}{\sqrt{1 + U(s)^2 + V(s)^2}}.$$

Ens trobem, doncs, en les hipòtesis del Lema C.1 amb la funció

$$t(s) = \frac{1}{\sqrt{1 + U(s)^2 + V(s)^2}}.$$

Un càlcul directe, tenint en compte $U(0) = V(0) = 0$ (condició corresponent al fet que el pla tangent a l'origen és el pla $t = 0$), dona $t''(0) = -(U'(0)^2 + V'(0)^2)$ i, pel Lema C.1,

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \alpha'(s) = \sqrt{U'(0)^2 + V'(0)^2}.$$

En particular, com que

$$\begin{aligned} U'(0) &= \frac{dU(u(s), v(s))}{ds} \Big|_{s=0} = e \frac{du(s)}{ds} \Big|_{s=0} + f \frac{dv(s)}{ds} \Big|_{s=0}, \\ V'(0) &= \frac{dV(u(s), v(s))}{ds} \Big|_{s=0} = f \frac{du(s)}{ds} \Big|_{s=0} + g \frac{dv(s)}{ds} \Big|_{s=0}. \end{aligned}$$

on e, f, g són els coeficients de la segona forma fonamental, tenim

$$\lim_{s \rightarrow 0^+} \alpha'(s) = \sqrt{(eu'(0) + fv'(0))^2 + (fu'(0) + gv'(0))^2} \quad (24)$$

expressió que és independent de la corba $\sigma(s)$ escollida, sempre que tingui el mateix vector tangent ν en A , cosa que justifica la notació $k_M(A, \nu)$.

Així, la curvatura d'una superfície, en un punt i en una direcció és la generalització natural de la curvatura d'una corba plana, definida com la derivada

respecte del paràmetre arc de l'angle que forma la tangent amb una direcció donada.

Nota. Observem que l'expressió (24) és exactament la mateixa que l'expressió (4) obtinguda per Meusnier, substituint els increments du, dv per les derivades $u'(0)$ i $v'(0)$ respectivament.

De fet, es pot arribar a (24) aplicant (4) a punts d'una corba propera a l'origen, donada per $(u(s), v(s)) = (u'(0)s + O(s^2), v'(0)s + O(s^2))$ i després derivant respecte de s en $s = 0$. En efecte, la fórmula (4) diu que⁸¹

$$\begin{aligned}\Xi(s) &= \sqrt{(eu(s) + fv(s))^2 + (fu(s) + gv(s))^2 + O(s^3)} \\ &= |s|\sqrt{(eu'(0) + fv'(0))^2 + (fu'(0) + gv'(0))^2 + O(s)}.\end{aligned}$$

Ara ja és clar que la derivada per la dreta de $\Xi(s)$ en $s = 0$ coincideix amb la derivada per la dreta de $\alpha(s)$ en $s = 0$,⁸² és a dir,

$$\Xi'_+(0) = \sqrt{(eu'(0) + fv'(0))^2 + (fu'(0) + gv'(0))^2} = \lim_{s \rightarrow 0^+} \alpha'(s).$$

Relació de la curvatura de Meusnier amb les curvatures normals

Proposició D.2. *La curvatura de Meusnier en un punt A de la superfície, en la direcció donada per un vector unitari v , tangent a la superfície en A , coincideix amb el valor absolut de l'endomorfisme de Weingarten en A aplicat a v , és a dir,*

$$k_M(A, v) = |W_A(v)|.$$

Demostració. Per definició de W_A tenim que

$$W_A(v) = \frac{d}{ds}\bigg|_{s=0} v(\sigma(s)),$$

on v és la normal a la superfície i $\sigma(s)$ és una corba sobre la superfície amb $\sigma(0) = A$ i $\sigma'(0) = v$. Però és sabut –vegeu el Lema C.2 de l'Apèndix– que el mòdul d'aquest valor coincideix amb la derivada per la dreta en $s = 0$ de l'angle que forma la normal a la superfície en el punt $\sigma(s)$ amb la normal a la superfície en A , és a dir, coincideix amb $k_M(A, v)$. $\square$

⁸¹Vegeu la nota al peu de pàgina 16, pàgina 14.

⁸²Com que la funció $\alpha(s)$ és $\mathcal{C}^1$ a $(0, 1)$ i contínua a $[0, 1]$ la derivada per la dreta en 0 coincideix amb el límit per la dreta de les derivades.

Així, si e_1, e_2 són els vectors propis de W_A , amb valors propis k_1, k_2 , tenim per a tot vector $w = \cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_2$,

$$\begin{aligned} k_M(A, w) &= |W_A(\cos(\alpha)e_1 + \sin(\alpha)e_2)| \\ &= |\cos(\alpha)k_1e_1 + \sin(\alpha)k_2e_2| \\ &= \sqrt{k_1^2 \cos^2(\alpha) + k_2^2 \sin^2(\alpha)}. \end{aligned}$$

En particular,

$$k_M(A, e_i) = |k_i|, \quad i = 1, 2.$$

És a dir, en les direccions principals la curvatura de Meusnier coincideix amb la curvatura normal (llevat del signe); però en les altres direccions no coincideixen amb les curvatures normals, com es pot veure comparant amb la fórmula d'Euler per a la curvatura normal

$$k_n(\alpha) = k_1 \cos^2(\alpha) + k_2 \sin^2(\alpha).$$

E Convex-còncava i còncav-convexa

Vegem alguns exemples de convexitat i concavitat.

Còncava. El paraboloid el·líptic $z = x^2 + y^2$ és una superfície còncava, ja que amb la notació de la secció §33 tenim $p = 2x, q = 2y, m = 2, n = 0, s = 2$, i, per tant $U = m(1 + q^2 - 2npq + s(1 + p^2)) = 2(1 + 4y^2) + 2(1 + 4x^2) = 4 + 8z$ amb $z \geq 0$, i $V = n^2 - ms = -4$, per tant, estem en el cas $U > 0, V < 0$, que correspon a una superfície còncava.

Convexa. L'hemisferi nord de l'esfera $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ té $p = -x/z, q = -y/z, m = -(x^2 + z^2)/z^3, n = -xy/z^3, s = -(z^2 + y^2)/z^3$. De manera que

$$U = -2/z^3, \quad V = -1/z^4,$$

estem, doncs, en el cas $U < 0, V < 0$ que correspon a una superfície convexa. El mateix càlcul ens diu que l'hemisferi sud d'aquesta esfera correspon a una superfície còncava.

Convex-còncava. L'hiperboloide d'un full $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$, amb $x^2 + y^2 \geq 1$, té $p = x/z, q = y/z, m = (z^2 - x^2)/z^3, n = -xy/z^3, s = (z^2 - y^2)/z^3$, i, per tant, $U = 2/z^2, V = 1/z^4$. Si $z = 0$ aquests valors són infinits. Si $z \neq 0, U > 0, V > 0$, cosa que correspon a una superfície convex-còncava.

Còncav-convexa. El paraboloid hiperbòlic $z = x^2 - y^2$ té $p = 2x, q = -2y, m = 2, n = 0, s = -2$, i, per tant, $U = -8z, V = 4$. Si $z = 0, U = 0$ i no estem en cap dels 4 casos de Meusnier. Si $z > 0$, tenim $U < 0, V > 0$, i es tracta d'una superfície còncav-convexa; si $z < 0, U > 0, V > 0$, i es tracta d'una superfície convex-còncava.

r

F Endomorfisme de Weingarten del tor

Proposició F.1. *L'endomorfisme de Weingarten a l'origen de la superfície de revolució obtinguda fent girar un petit arc de circumferència del pla $y = 0$, amb centre $C = (0, 0, r)$ i radi r , al voltant de la recta l que passa per $(0, 0, \rho)$ i té per vector director $(1, 0, 0)$, coincideix amb l'endomorfisme de Weingarten a l'origen del paraboloid el·líptic $z = \frac{u^2}{2r} + \frac{v^2}{2\rho}$.*

Demostració. Estudiem primer el paraboloid. Si posem

$$\varphi(u, v) = (u, v, z(u, v)),$$

tenim

$$\begin{aligned}\varphi_u &= (1, 0, \frac{u}{r}), & \varphi_v &= (0, 1, \frac{v}{\rho}), \\ \varphi_{uu} &= (0, 0, \frac{1}{r}), & \varphi_{uv} &= (0, 0, 0), & \varphi_{vv} &= (0, 0, \frac{1}{\rho}).\end{aligned}$$

A l'origen, és a dir $u = v = 0$, la primera forma fonamental és la identitat i com la normal és $(0, 0, 1)$

$$W = I^{-1}II = II = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}.$$

Estudiem ara el tor.

Considerem un punt arbitrari $P = (x, 0, z)$ de l'arc de circumferència donat, és a dir, un punt que satisfà $x^2 + (z - r)^2 = r^2$. Sigui R el punt de l'eix de gir l que té la mateixa coordenada x que P , és a dir $R = (x, 0, \rho)$

Quan fem girar el punt P al voltant de l'eix l un angle α , el punt es desplaça fins a la posició

$$P' = (x, RP \sin \alpha, \rho - RP \cos \alpha),$$

on $RP = \rho - z(x)$, i $z(x)$ és la tercera coordenada de P .

La superfície de revolució és, doncs,

$$\psi(x, \alpha) = (x, (\rho - r + \sqrt{r^2 - x^2}) \sin \alpha, \rho - (\rho - r + \sqrt{r^2 - x^2}) \cos \alpha).$$

O, introduint l'angle β tal que $x = r \cos \beta$, $y = r + r \sin \beta$,

$$\psi(\beta, \alpha) = (r \cos \beta, (\rho - r + r \sin \beta) \sin \alpha, \rho - (\rho - r + r \sin \beta) \cos \alpha). \quad (25)$$

Així

$$\begin{aligned} \psi_\beta &= (-r \sin \beta, r \cos \beta \sin \alpha, -r \cos \beta \cos \alpha), \\ \psi_\alpha &= (0, (\rho - r + r \sin \beta) \cos \alpha, (\rho - r + r \sin \beta) \sin \alpha), \\ \psi_{\beta\beta} &= (-r \cos \beta, -r \sin \alpha \sin \beta, r \sin \beta \cos \alpha), \\ \psi_{\alpha\beta} &= (0, r \cos \beta \cos \alpha, r \cos \beta \sin \alpha), \\ \psi_{\alpha\alpha} &= (0, -(\rho - r + r \sin \beta) \sin \alpha, (\rho - r + r \sin \beta) \cos \alpha). \end{aligned}$$

A l'origen, és a dir, $\alpha = 0$, $\beta = \pi/2$, tenim doncs

$$\begin{aligned} \psi_\beta &= (-r, 0, 0), \quad \psi_\alpha = (0, \rho, 0), \\ \psi_{\beta\beta} &= (0, 0, r), \quad \psi_{\alpha\beta} = (0, 0, 0), \quad \psi_{\alpha\alpha} = (0, 0, \rho). \end{aligned}$$

Per tant, l'endomorfisme de Weingarten a l'origen és

$$W = I^{-1}II = \begin{pmatrix} r^{-2} & 0 \\ 0 & \rho^{-2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & 0 \\ 0 & \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\rho} \end{pmatrix}$$

com volíem veure. □

Nota. Amb la notació que usa Meusnier a la secció §7, l'equació (25) s'escriu com

$$\begin{aligned} u &= r \cos \beta, \\ v &= (\rho - r + r \sin \beta) \sin \alpha, \\ t &= \rho - (\rho - r + r \sin \beta) \cos \alpha. \end{aligned}$$

Un petit càlcul permet aïllar els angles α i β en funció de u i v , cosa que permet considerar, localment, el tor com la gràfica d'una funció $t = t(u, v)$. Això fa possible veure que l'expressió de la segona forma fonamental en el punt A , respecte d'aquestes coordenades, és $ddt = \frac{du^2}{r} + \frac{dv^2}{\rho}$. Meusnier arriba a aquesta conclusió a la secció §8, sense necessitat d'explicitar les equacions d'aquest tor. De fet, la funció és $t(u, v) = \rho - \sqrt{(\rho - r + \sqrt{r^2 - u^2})^2 - v^2}$.

G La fórmula estàtica de Meusnier

Proposició G.1. *Siguin A i B dos punts d'un cercle de centre C i radi r . Denotem per $\widehat{AB}$ la longitud de l'arc de cercle determinat per aquests dos punts.*

Llavors es compleix que

$$\widehat{AB} \cdot gC = r \cdot AB$$

on g és el centre de gravetat de l'arc AB .

Demostració. Aquest arc es pot parametritzar per $(x, y) = (r \cos t, r \sin t)$, amb $-\alpha \leq t \leq \alpha$, on $\alpha = \angle RCA$ essent R el punt mitjà sobre l'arc entre A i B .

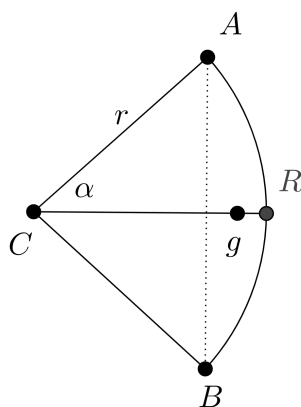


Figura 23: Fórmula estàtica.

L'element de longitud satisfà $ds = r dt$, i l'abscissa $\bar{x} = Cg$ del centre de gravetat g és, per definició,

$$\bar{x} = \frac{\int_0^{\widehat{AB}} x(s) ds}{\widehat{AB}} = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} r^2 \cos(t) dt}{\widehat{AB}} = \frac{2r^2 \sin \alpha}{\widehat{AB}} = \frac{r \cdot AB}{\widehat{AB}}$$

la qual cosa conclou la demostració. □

Referències

- [1] Pierre Ossian Bonnet, *Mémoire sur la théorie générale des surfaces*, Journal de l'École Polytechnique, **19** (1848), trente-deuxième cahier, 1–146.

- [2] Gaston Darboux, *Eloges académiques et discours*, Comité du Jubilé Scientifique de M. Gaston Darboux ed., Librairie Scientifique Hermann et Fils, Paris, 1912.
- [3] Leonhard Euler, *Recherches sur la courbure des surfaces*, Mémoires de l'Académie Royale des Sciences Berlin, **16** (1760), 119–143.
- [4] Josette Fournier, *Meusnier de la Place (1754-1793), officier du Génie, partenaire de Lavoisier*, Actualité Chimique, **416** (2017), 44–50.
- [5] Carl Friedrich Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Commentationes Societatis Regiae Scientiarum Gottingensis Recentiores Classis Mathematicae, **VI** (1828), 99–146.
- [6] Sophie Germain, *Mémoire sur la courbure des surfaces*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, **7** (1831), 1–29.
- [7] Antoine Lavoisier and Jean-Baptiste Meusnier, *Mémoire où l'on prouve par la décomposition de l'eau que ce fluide n'est point une substance simple et qu'il y a plusieurs moyens d'obtenir en grand l'air inflammable qui y entre comme principe constituant*, Observations sur la Physique, **XXIV** (1784), 368–380, lu a l'Académie le 21 avril 1784.
- [8] Serge Le Pottier, *Jean-Baptiste Meusnier de la Place*, Académie d'Angers (2016), 1–6.
- [9] Jean-Baptiste Meusnier, *Mémoire sur l'équilibre des machines aérostatiques, sur les différents moyens de les faire descendre et monter, et spécialement sur celui d'exécuter ces manoeuvres sans jeter de lest et sans perdre d'air inflammable, en ménageant dans le ballon une capacité particulière, destinée à contenir de l'air atmosphérique*, Journal de Physique (1784), 1–31, lu a l'Académie le 3 de décembre 1783.
- [10] ———, *Mémoire sur la courbure des surfaces*, Mémoires de savants Étrangers, Paris **X** (1785), 477–510, lu a l'Académie les 14 et 21 Février 1776.
- [11] Gaspard Monge, *Mémoire sur les propriétés de plusieurs genres de surfaces courbes, particulièrement sur celles des surfaces développables, avec une application à la théorie des ombres et des pénombres*, Mémoires de Mathématique et de Physique. Mémoires des Savants Étrangers. Paris. Présenté le 11 Janvier 1775 **9** (1780), 382–440.

- [12] ———, *Mémoire sur les développées, les rayons de courbure, et les différents genres d'inflexions des courbes à double courbure*, Mémoires présentés par divers savants à l'Académie des Sciences de l'Institut de France, **X** (1785), 511–550, veure també [13], pp. 392-420.
- [13] ———, *Application de l'Analyse à la Géométrie*, Bachelier, Paris, 1850, cinquena edició, revisada, corregida i anotada per J. Liouville. Primera edició de 1807.
- [14] Siméon-Denis Poisson, *Mémoire sur la courbure des surfaces*, Journal für die reine und angewandte Mathematik **8** (1832), 280–297.
- [15] Gregorio Ricci, *Lezioni sulla teoria delle superficie*, Fratelli Drucker, Verona-Padova, 1898.
- [16] René Taton, *L'oeuvre scientifique de Monge*, Presses Universitaires de France, 1951.