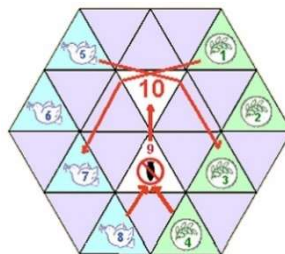


PROBLEMES A L'ESPRINT

Equips de batxillerat. 5 de febrer de 2025



Esteu a punt de començar el treball de reflexió i deducció amb alguns problemes que us plantejem. Que sigui, doncs, una bona estona de tasca matemàtica personal, i en equip. Ànim!

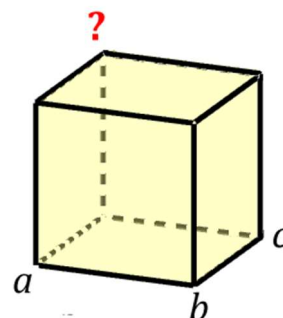
Tanmateix, abans de començar la feina heu d'haver procedit a enviar el formulari d'inscripció, que us haurà assignat una contrasenya de 9 caràcters del tipus

N735XKT34 (lletra lletra **xifra xifra xifra** lletra lletra lletra xifra xifra)

Primer grup de problemes

- Per al primer problema indiquem com a , b i c les tres primeres xifres de la contrasenya en l'ordre que hi apareixen. En la contrasenya donada com a exemple seria $a = 7$, $b = 3$, $c = 5$.

- Hem numerat els vèrtexs d'un cub amb les xifres de l'1 al 8, una xifra diferent en cada vèrtex i de manera que el resultat obtingut si sumem els quatre nombres dels vèrtexs d'una cara és el mateix per a totes les cares. Els nombres a , b i c ja estan posats sobre tres vèrtexs, com mostra la figura. Quin és el valor del nombre que correspon al vèrtex indicat amb el signe d'interrogació?

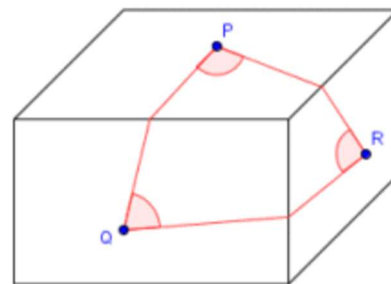


Atenció! En el formulari de resposta s'haurà de contestar el número que cal posar en el vèrtex **?**, però heu de **passar al problema 7** com a valor **S** la suma comuna dels vèrtexs de cadascuna de les cares.

- Una formiga viu a les cares d'un ortoedre. Sempre que s'ha de desplaçar d'un punt a un altre ho fa pel camí més curt i, com que sap geometria, realment encerta sempre el camí més curt per anar d'un punt d'una cara a un punt d'una altra cara.

En la figura es mostra l'itinerari que ha seguit per anar des de P cap a Q , després de Q cap a R i finalment per tornar des de R cap a P .

Quina és la suma dels tres angles assenyalats a la figura?



Nota: si penseu que pot dependre de quins siguin els punts respondreu "Depèn",

- Ve un valor C , calculat a partir de la resposta del problema 5.

Si es compleix que $x + y = 2$ i que $x^3 + y^3 = C$, quin és el valor de $x^2 + y^2$?

-
4. En una olimpíada matemàtica hi van participar 55 concursants. Per a corregir les respostes el jurat marcava amb un + els problemes solucionats correctament, amb un - els problemes resolts de manera incorrecta i amb un 0 si el participant no l'havia resolt. Després, es va observar que no hi havia dos concursants que coincidissin en el nombre de + i -.
- Quin és el mínim nombre possible de problemes en aquest concurs?

Atenció! La resposta passa com a valor M al problema 9

Segon grup de problemes

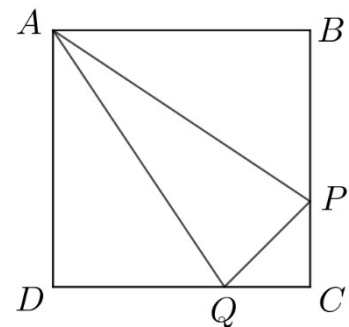
- 5.- Els set nans tenen cadascun una samarreta amb un número de l'1 al 7. Cada dia la Blancaneus els fa posar l'un al costat de l'altre i així veu un nombre de set xifres. Ara bé, ho ha de fer amb la condició que els nans amb les samarretes 1 i 2 quedin sempre junts i en canvi els que tenen les samarretes 6 i 7 quedin sempre separats. Si ordenem en ordre creixent tots els nombres diferents de set xifres que pot veure la Blancaneus, quin queda en el lloc 169è?

Atenció! Heu de passar al problema 3 el nombre C de dues xifres que resulta de multiplicar les dues primeres xifres de la resposta (les de l'esquerra) i restar 1 al resultat d'aquesta multiplicació.

- 6.- Agafem un nombre de tres xifres diferents, i totes diferents de zero. Llavors escrivim els altres cinc nombres de tres xifres que es poden construir permutant aquestes tres xifres. Quin és el nombre més proper a 2025 que pot ser la suma **d'aquests cinc nombres**?
-

- 7.- **Ve un valor S del problema 1**

$ABCD$ és un quadrat de costat 10 cm i P i Q són dos punts sobre els costats de manera que APQ és un triangle isòsceles. Si l'àrea del triangle APQ és S cm², quina és la longitud en cm del segment QP ?

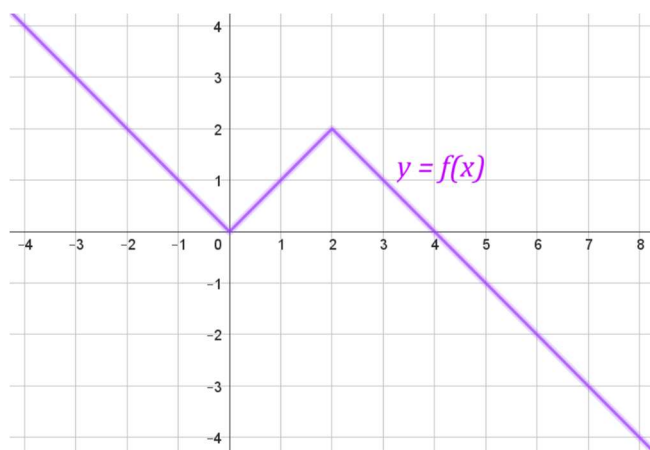


Nota: La resposta es pot escriure com \sqrt{t} per a un nombre enter t . Heu de respondre aquest valor de t .

8.- La gràfica de la funció $y = f(x)$ de la imatge està composta per dues semirectes i un segment de recta. Es demana que calculeu totes les solucions de l'equació

$$f(f(f(x))) = 0.$$

Atenció! Al formulari de respostes haureu de contestar quin creieu que és el nombre de solucions i quina és la solució que té un valor numèric més gran.



El nombre de solucions passa com a valor N al problema 9

Terçer grup de problemes (reptes finals)

9.- **Venen dos valors:** M , la resposta del problema 4, i N , el nombre de solucions de l'equació del problema 8 (no el valor de cap solució) i es fa servir un valor $P = M - N$.

$ABCDE$ es un pentàgon del pla que té els vèrtexs, en un sistema de coordenades cartesianes rectangulars, en els punts de coordenades

$$A(0,0), B(M,0), C(M,P), D(5,P) \text{ i } E(0,11).$$

El volem dividir en dos polígons d'igual àrea mitjançant una recta de la forma $x = k$.
Calculeu el valor de k .

Nota: Si k és un nombre enter, com a tal l'escriureu, sense signe; si k és racional, l'escriureu com una fracció irreductible, sense signe ni cap espai en blanc, amb el numerador separat del denominador amb / ; si k no és racional el donareu arrodonit al primer decimal, amb la , per a separar part entera de part decimal, sense cap espai en blanc.

10.- La Paula tira un dau, successivament, quatre vegades i amb els punts que marca el dau cada vegada, traduïts a xifres, escriu un nombre de quatre xifres.
Per exemple pot obtenir 5612 o 1234 o 3333.

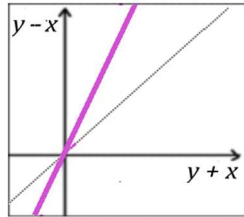
Calculeu quina és la probabilitat que obtingui un nombre de quatre xifres amb la propietat que cada xifra és més gran o igual que l'anterior, com per exemple succeeix en 1234 o 1125 o 4446.

Nota: Escriureu la probabilitat com una fracció irreductible, sense signe ni cap espai en blanc, amb el numerador separat del denominador amb el caràcter /

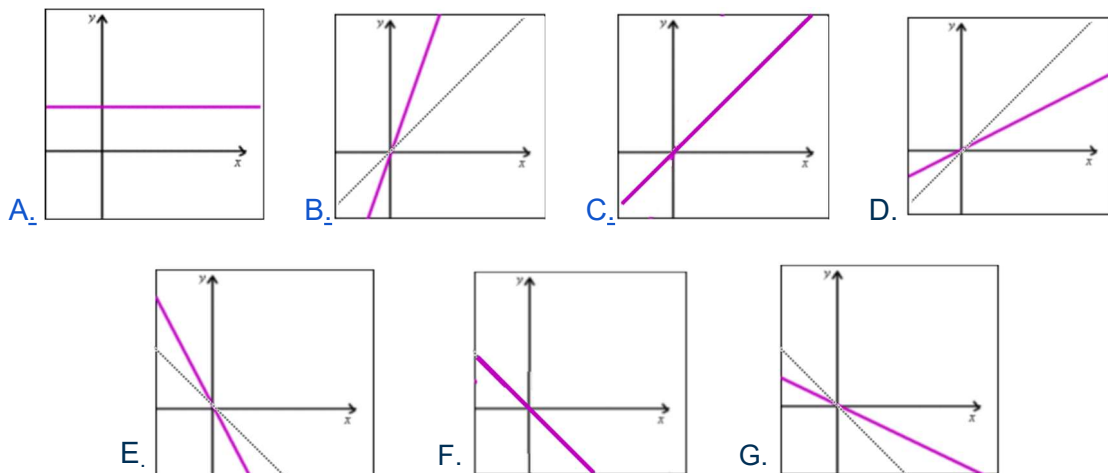
Problemes de propina

Propina 1

Observeu aquesta gràfica funcional:

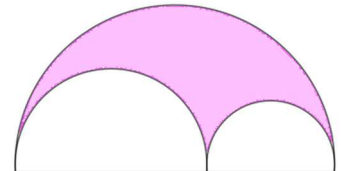


La recta de color, que passa per l'origen de coordenades, ens dóna la relació de dependència de la variable $y - x$ en funció de la variable $y + x$. Com a possible concreció es mostra la bisectriu dels quadrants on queda la funció lineal. Ara us demanem que seleccioneu, entre les gràfiques següents, quina és la que dóna la dependència de y en funció de x .

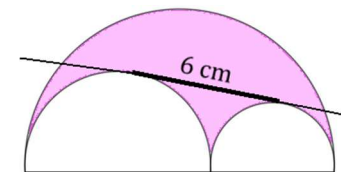


Propina 2

En una joieria han dissenyat un penjoll retallant dos semicercles, que un té el radi doble de l'altre, d'un semicercle gran de metall, amb les tangències que es veuen a la figura.



Si es dibuixa la tangent comuna als dos semicercles, el segment que uneix els dos punts de tangència és de 6 cm.



Quina és la superfície del penjoll?

Propina 3

La successió 3, 15, 24, 48, 63 està formada pels nombres enters positius que són múltiples de 3 i el resultat de restar 1 a un quadrat perfecte. Quin és el valor del nombre que ocupa el lloc 101 de l'esmentada successió?