Problemes

Problema 1. *Siguin r i s dos nombres primers senars consecutius. Demostreu que $r+s$ és producte d'almenys tres enters positius més grans que 1 no necessàriament distints.*

Problema 2. *Si α és un nombre irracional, demostreu que α^{17} i α^{19} no poden ser ambdós números racionals.*

Problema 3. *El punt X és a l'interior de l'arc BC de la circumferència circumscrita al triangle ABC. Les rectes AB i CX es tallen a E, i les rectes AC i BX es tallen a F. La mediatriu del segment AB talla el segment AC a K i la mediatriu del segment AC talla el segment AB a J. Demostreu que*

$$\left(\frac{CE}{BF}\right)^2 = \frac{AJ \cdot JE}{AK \cdot KF}.$$

Solucions

Problema 1. *Siguin r i s dos nombres primers senars consecutius. Demostreu que $r+s$ és producte d'almenys tres enters positius més grans que 1 no necessàriament distints.*

Solució. Com que $s-r=2k$ és parell, obtenim $r+s=2(r+k)$. És clar que $r<r+k<r+2k=s$. Aleshores $r+k$ no és primer perquè està entre dos primers consecutius i, aleshores, és el producte de dos enters positius més grans que 1. Llavors, $r+s$ és el producte de com a mínim tres enters positius més grans que 1 no necessàriament distints.

Problema 2. *Si α és un nombre irracional, demostreu que α^{17} i α^{19} no poden ser ambdós números racionals.*

Solució. Primer de tot, observem que si α és racional, per exemple $\alpha=p/q$ amb $(p,q)=1$, aleshores per tots enters $m\geq 1$, la potència

$$\alpha^m = \left(\frac{p}{q}\right)^m = \frac{p^m}{q^m}, \quad (p,q)=1$$

és també un nombre racional. Resolem el problema per contradicció. En efecte, suposem que α^{17} i α^{19} són tots dos racionals. Aleshores, tenint en compte que les potències de nombres racional són també nombres racionals, obtenim que

$$\begin{array}{cccccccccc} \alpha^{17} & \alpha^{34} & \alpha^{51} & \alpha^{68} & \alpha^{85} & \alpha^{92} & \alpha^{119} & \alpha^{136} & \alpha^{153} & \dots \\ \alpha^{19} & \alpha^{38} & \alpha^{57} & \alpha^{76} & \alpha^{95} & \alpha^{114} & \alpha^{133} & \alpha^{152} & \alpha^{171} & \alpha^{190}\dots \end{array}$$

són també nombres racionals. Llavors, tenint en compte que el quocient de dos nombres racionals és també racional, tenim que $\alpha^{153}/\alpha^{152}=\alpha$ és racional.

Contradicció. Aleshores, si α és un nombre irracional, aleshores com a mínim un dels α^{17} i α^{19} és un nombre racional.

Problema 3. *El punt X és a l'interior de l'arc BC de la circumferència circumscrita al triangle ABC. Les rectes AB i CX es tallen a E, i les rectes AC i BX es tallen a F. La mediatriu del segment AB talla el segment AC a K i la mediatriu del segment AC talla el segment AB a J. Demostreu que*

$$\left(\frac{CE}{BF}\right)^2 = \frac{AJ \cdot JE}{AK \cdot KF}.$$

Solució. Al dibuix següent, tenim que $\triangle AKB$ i $\triangle AJC$ són isòsceles (perquè

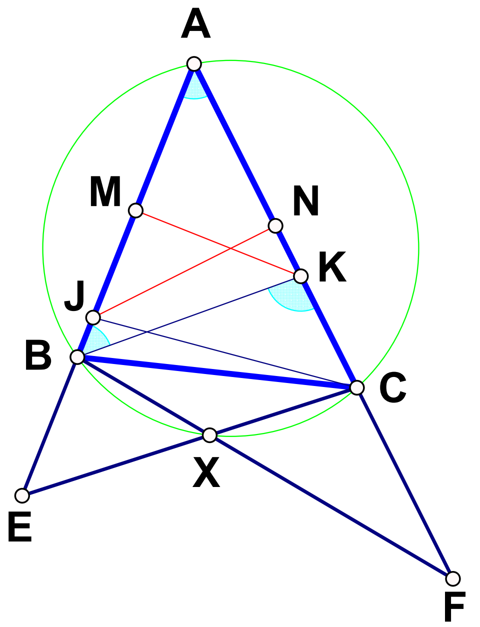

Figura per resoldre el problema 3.

M i N són els punts mitjans dels AB i AC, respectivament) amb $KB = AK$ i $CJ = JA$. Aleshores, $\angle FKB = 2\angle A = \angle CJE$. Adicionalment, $\angle BFK = \angle BFC = \angle C - \angle CBF = \angle C - \angle CBX = \angle C - \angle CAX = (\angle C - \angle A) + (\angle A - \angle CAX) = \angle BCJ + \angle XAB = \angle BCJ + \angle XCB = \angle XCJ = \angle ECJ$. Aleshores, els triangles $\triangle BFK \sim \triangle ECJ$ són similars, perquè tenen angles iguals. Aleshores, obtenim

$$\frac{EC}{BF} = \frac{JE}{KB} = \frac{CJ}{FK},$$

i

$$\left(\frac{EC}{BF}\right)^2 = \frac{JE}{KB} \cdot \frac{CJ}{FK} = \frac{JE \cdot JA}{AK \cdot FK} = \frac{AJ \cdot JE}{AK \cdot KF}.$$