Problema 1.

Un quadrat es divideix en 2023^2 *quadrats més petits, obtenint un tauler* 2023×2023*. Per cada* $k \leq 2023$*, considerem la suma de les àrees de tots els quadrats* $k \times k$ *(no necessàriament disjunts) que es poden trobar al tauler. Per quin valor de* k *aquesta suma és màxima?*

Solució.

El nombre total de quadrats $k \times k$ és $(2024 - k)^2$ i cadascun d'aquests té àrea k^2. Per tant, la suma de les àrees de tots aquests quadrats $k \times k$ serà

$$k^2 \ (2024 - k)^2.$$

El màxim de $k^2 \ (2024 - k)^2 = \big(k(2024 - k)\big)^2$ tindrà lloc quan $k(2024 - k)$ sigui màxim i com que el producte de dos nombres de suma constant (en aquest cas, k i $2024 - k$) és màxima quan els dos nombres són iguals, tindrem que la suma de les àrees de tots els quadrats $k \times k$ serà màxima quan $k = 1012$.

Observació. Si els nombres reals positius x, y compleixen que $x + y = k$, aleshores la desigualtat aritmètico-geomètrica $\sqrt{xy} \leq (x + y)/2 = k/2$ ens diu que $xy \leq k^2/4$ i que la igualtat només es pot donar si $x = y = k/2$.

Problema 2.

El nombre 1 està escrit a la pissarra. L'Aina i la Bruna juguen a un joc alternadament i comença l'Aina. A cada torn, la jugadora corresponent té dues opcions: o bé multiplicar el nombre de la pissarra per 2 o bé sumar-li 1. Perd la jugadora que en el seu torn es passi (estrictament) de 2048. Determineu si alguna de les dues jugadores té una estratègia guanyadora.

Solució.
Diem que un nombre x escrit a la pissarra és guanyador si, quan una jugadora es troba amb aquest nombre, té una estratègia guanyadora per acabar la partida. Altrament, diem que és perdedor.

Dividim el problema en "intervals" segons els valors de x. Els intervals són

$$\mathcal{A}_0 = [2^0], \mathcal{A}_1 = (2^1, 2^2], \mathcal{A}_2 = (2^3, 2^4], \mathcal{A}_3 = (2^5, 2^6], \mathcal{A}_4 = (2^7, 2^8], \mathcal{A}_5 = (2^9, 2^{10}]$$

$$\mathcal{B}_0 = (2^0, 2^1], \mathcal{B}_1 = (2^2, 2^3], \mathcal{B}_2 = (2^4, 2^5], \mathcal{B}_3 = (2^6, 2^7], \mathcal{B}_4 = (2^8, 2^9], \mathcal{B}_5 = (2^{10}, 2^{11}]$$

Observem que x pertany a la unió disjunta i "ordenada"

$$\mathcal{A}_0 \cup \mathcal{B}_0 \cup \mathcal{A}_1 \cup \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{B}_2 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{B}_3 \cup \mathcal{A}_4 \cup \mathcal{B}_4 \cup \mathcal{A}_5 \cup \mathcal{B}_5 = [1, 2048]$$

És evident que $x = 2048$ és perdedor, ja que si alguna jugadora se'l troba, tant si li'n suma 1 com si el multiplica per 2, perd el joc. Aleshores $x = 2047$ guanya, $x = 2046$ és perdedor, etc, fins el $x = 1025$ que és guanyador. A l'interval $\mathcal{B}_5 = [1025, 2048]$ les jugadores no tenen més remei que anar sumant 1 cada vegada, i els valors senars són guanyadors i els parells perdedors.
A l'interval $\mathcal{A}_5 = [513, 1024]$ tots els nombres són guanyadors, ja que si una jugadora troba un d'aquests nombres, pot multiplicar-lo per 2 i anar a un nombre parell de $\mathcal{B}_5$ que és perdedor.
Si una jugadora es troba amb un nombre de $\mathcal{B}_4 = [257, 1024]$ no pot multiplicar-lo per 2, ja que aniria a un guanyador de $\mathcal{A}_5$ i ella perdria: només pot sumar-hi 1, però ara torna a passar, com en cas del $\mathcal{B}_6$, que els valors senars són guanyadors i els parells són perdedors.
Pel mateix motiu explicat abans, tots els nombres de $\mathcal{A}_4$ són guanyadors, i també ho seran els de $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_1$ i $\mathcal{A}_0$ i els nombres senars de $\mathcal{B}_3$, $\mathcal{B}_2$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_0$.
En resum, un nombre x, $2^k < x \leq 2^{k+1}$, és guanyador si i només si x i k satisfan alguna de les següents condicions:

- k és parell i x és senar.
- k és senar.

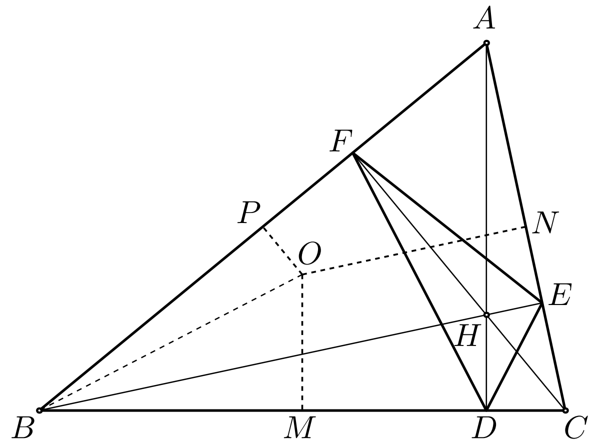
Resulta que l'Aina té estratègia guanyadora.

Observació.
La paritat de k del resum anterior podria canviar si en lloc de 2048 haguéssim posat com a límit del joc una altra potència de 2.

Problema 3.

Sigui $\triangle ABC$ un triangle acutangle, i siguin D, E, F els peus de les altures del triangle sobre els costats BC, CA i AB, respectivament. Demostreu que el perímetre del triangle $\triangle DEF$ és igual a $2S/R$, on S és l'àrea del triangle $\triangle ABC$, i R és el radi de la circumferència que passa pels vèrtexs A, B, C.

Solució 1.



A la figura M, N, P són els punts mitjans dels costats, O el circumcentre, D, E,F els peus de les altures i H l'ortocentre.

El quadrilàter $AFDC$ és cíclic i per tant $\widehat{BFD} = C$. D'aquí que els triangles ABC i BFD siguin semblants i sigui $\dfrac{FD}{AC} = \dfrac{BF}{BC}$, és a dir, $FD = b\cos B$. També serà $DE = c\cos C$ i $EF = a\cos A$. Si diem s al semiperímetre del triangle DEF tindrem $s = \frac{1}{2}(a\cos A + b\cos B + c\cos C)$.

D'altra banda tenim $\widehat{BOM} = A$ i resulta que $OM = OB\cos A = R\cos A$ si R és el circumradi. Surt $[BOC] = \frac{1}{2}Ra\cos A$. Anàlogament $[COA] = \frac{1}{2}Rb\cos B$ i $[AOB] = \frac{1}{2}Rc\cos C$. Hem indicat amb $[XYZ]$ l'àrea del triangle XYZ.

Finalment

$$[ABC] = [AOB] + [BOC] + [COA] = \frac{1}{2}R(a\cos A + b\cos B + c\cos C) = Rs.$$

Solució 2.

El quadrilàter $AFDC$ és cíclic, i per tant $\widehat{BFD} = C$. Per tant, els triangles $\triangle ABC$ i $\triangle BFD$ són semblants, i tenim

$$\frac{FD}{AC} = \frac{BF}{BC} = \cos B.$$

Això vol dir que el perímetre del triangle $\triangle DEF$ és $a\cos A + b\cos B + c\cos C$. Com que $\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ aleshores el perímetre de $\triangle DEF$ és

$$\frac{a^2(-a^2+b^2+c^2) + b^2(a^2-b^2+c^2) + c^2(a^2+b^2-c^2)}{2abc}.$$

Per altra banda, com que és conegut que

$$R = \frac{abc}{4S} \qquad \text{i} \qquad S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

on $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$, aleshores

$$\frac{2S}{R} = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}{2abc}.$$

Finalment, calculant queda

$$\begin{aligned}(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) = \\ = -a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 \\ = a^2(-a^2+b^2+c^2) + b^2(a^2-b^2+c^2) + c^2(a^2+b^2-c^2),\end{aligned}$$

aleshores efectivament el perímetre de $\triangle DEF$ és $2S/R$.

Problema 4.

Trobeu el menor enter positiu n *pel qual el nombre* $1000 \cdot 1001 \cdot \dots \cdot (1000+n)$ *és divisible per tots els nombres primers menors que 100.*

Solució.

Busquem, per cadascun dels nombres primers 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, ..., 73, 79, 83, 89, 97, el mínim múltiple més gran que 1000. Comencem pels més grans: $97 \cdot 11 = 1067$ és el menor múltiple de 97 que és més gran que 1000; mentre que tenim també $89 \cdot 12 = 1062$ i $83 \cdot 13 = 1079$. Per tal que el producte de l'enunciat sigui divisible per 83, hem de tenir necessàriament $1000 + n \geq 1079$, i per tant $n \geq 79$. Per qualsevol valor $n \geq 79$ sabem que el producte de l'enunciat serà divisible per 97, 89, i 83. Finalment, notem també que entre els vuitanta nombres 1000, 1001, ..., 1079 hi ha necessàriament múltiples de 79, 73, ..., 13, 11, 7, 5, 3, 2, i per tant el nombre buscat és $n = 79$.

Problema 5.

Sigui $\triangle ABC$ un triangle amb mitjanes de longitud m_a, m_b, m_c. Sigui $\triangle PQR$ un triangle que té per costats m_a, m_b, m_c; i siguin d_a, d_b, d_c les distàncies del baricentre d'aquest triangle als seus vèrtexs. Demostreu que:

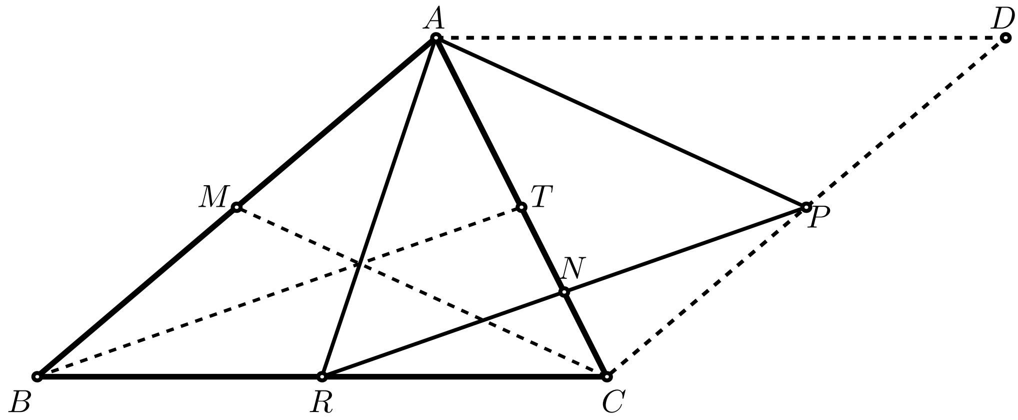
a) $d_a + d_b + d_c = p/2$

b) $[PQR] = \frac{3}{4}[ABC]$

on p és el perímetre de $\triangle ABC$, i $[ABC]$ i $[PQR]$ són les àrees dels triangles $\triangle ABC$ i $\triangle PQR$.

Solució.

Sigui D el punt tal que $ABCD$ és un paral·lelogram, i siguin M, R, P, T els punts mitjans de AB, BC, CD i AC respectivament. Aleshores, $m_a = AR$, $m_b = BT$ i $m_c = MC$. Però és clar que $AP = MC$, i $BT = RP$. Per tant, el triangle $\triangle PQR$ (on Q és el punt A), té per costats m_a, m_b i m_c. Si denotem per N el punt de tall de AC i RP, observem que N és el punt mitjà de RP i, per tant, AN és una mitjana de $\triangle PQR$. Però a més, $AT = CC = 2TN$, i per tant, T és el baricentre de $\triangle PQR$. En conseqüència, $d_a = TP$,$d_b = TA$ i $d_c = TR$. Però $AT = \frac{1}{2}AC$, $TR = MB = \frac{1}{2}AB$ i $TP = RC = \frac{1}{2}BC$, és a dir, $d_a + d_b + d_c = \frac{1}{2}(a + b + c) = p$.



Per altra banda, $[PQR] = [ABCD] - [ABR] - [APD] - [RPC]$, i com que $[ABCD] = 2[ABC]$, $[ABR] = \frac{1}{2}[ABC]$, $[APD] = \frac{1}{2}[ABC]$, i $[RCP] = \frac{1}{4}[ABC]$, aleshores, $[PQR] = \frac{3}{4}[ABC]$, com volíem demostrar.

Problema 6.

Direm que un nombre enter positiu n és amable si en dividir per n tots els nombres del tipus $1+2+...+k$ (per $k=1,2,3,\ldots,i,\ldots$) s'obtenen tots els residus possibles: $0,1,...,n-1$.

a) Demostreu que si n és amable també ho són tots els seus divisors.

b) Determineu tots els enters positius n que són amables.

Solució.
Definim $T_k = 1+2+...+k$.

a) Suposem que $n=a\cdot b$ és amable. Aleshores, per a qualsevol $r=0,...,n-1$ es compleix que existeix un k pel qual $T_k = qn+r$. En particular, per tot $r=0,...,a-1$ tindrem un k pel qual $T_k = qn+r = qba+r$. Això vol dir que a també és amable.

b) Per qualsevol n senar, calculem la diferència

$$T_{k+n} - T_k = n\left(\frac{n+1}{2}+k\right).$$

Això vol dir que $T_{k+n}-T_k$ és múltiple de n, i per tant la successió $T_1, T_2, ...$ és periòdica de període n. Si n fos amable, els n residus de $T_1, ..., T_n$ en dividir per n haurien de ser tots diferents, però això no passa ja que tant $T_{n-1} = \frac{n-1}{2}n$ com $T_n = n\frac{n+1}{2}$ són múltiples de n. Per tant, hem demostrat que cap nombre senar és amable.

Combinant aquesta informació amb la de l'apartat a), veiem que els únics enters n que poden ser amables són les potències de 2.

Demostrem a continuació que efectivament qualsevol enter de la forma $n=2^\alpha$ és amable. El que demostrarem és que tots els n nombres

$$T_1, T_3, ..., T_{2n-1}$$

donen residus diferents en dividir per n. Suposem que tinguéssim $T_{2j-1}-T_{2i-1} = q\cdot 2^\alpha$ per alguns $0 \le i < j \le 2^\alpha$. Aleshores, com que $T_{2k-1} = k(2k-1)$, tindríem

$$q\cdot 2^\alpha = j(2j-1) - i(2i-1) = (j-i)(2(i+j)+1).$$

Com que l'últim factor és senar, hauria de ser $2^\alpha | j-i$, cosa que és impossible ja que $j-i < 2^\alpha$. Això vol dir que efectivament tots els n nombres

$$T_1, T_3, ..., T_{2n-1}$$

donen residus diferents en dividir per n, i per tant n és amable.