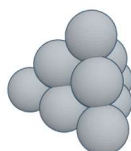


XI Copa Cangur – Final Categoria Junior - Solucions

Atenció:

- Les respostes a tots els problemes són nombres enters de com a màxim quatre xifres i sense unitats de mesura.
- Si algun problema no té solució, la resposta que heu de lliurar és 0000 (si la solució és 0, també heu de lliurar 0).
- Si en un problema s'utilitza només un tipus d'unitats, se sobreentén que la resposta ha d'estar en aquestes mateixes unitats, o en aquestes unitats quadrades o cúbiques.
- Les figures mostrades no estan necessàriament a escala per les dades que es donen
- Les mesures angulars s'expressen sempre en graus sexagesimals.
- Els zeros a l'inici d'un nombre enter no compten com a xifres del nombre. És a dir, 00672 és un nombre de 3 xifres i no de 5.

- 1) Amb 84 esferes idèntiques fem una torre en forma de tetraedre regular, similar al de la imatge però amb més esferes, deixant el mínim espai possible entre elles. Quants punts de tangència hi ha entre totes les esferes?



Solució: 336

- 2) En un pla hi tenim uns eixos de coordenades orientats de la manera habitual. Ens situem al punt (0,0) i ens movem seguint un patró: deu unitats a la dreta, deu unitats amunt, nou unitats a l'esquerra i nou unitats cap avall. Anem repetint aquest patró fins que ens hem mogut exactament 2025 unitats. En quin punt acabarem? (Doneu com a resposta les dues coordenades seguides, per exemple, si la solució és el punt (28,49) responeu 2849)

Solució: 6354

- 3) Quants nombres naturals entre 1 i 2025 es poden escriure de la forma a^b amb a i b nombres naturals més grans (no iguals) que 1?

Solució: 56

- 4) En una botiga fan una promoció per un article que té un preu inicial fixat. Si en comprem una unitat, ens la venen amb un 1% de descompte. Si en comprem dues, la primera té un 1% de descompte, i la segona, un 2% (sobre el preu inicial). Si en comprem tres, la primera té un 1% de descompte, la segona, un 2% i la tercera, un 3%. Si en comprem més unitats, el descompte s'aplica de la mateixa manera, per tant l' n -èsima unitat té un descompte del n % (noteu que si en compréssim 100 unitats, l'última seria gratuïta). Si en comprem 63 unitats, quin percentatge de la comanda ens estalviarem amb aquesta promoció?

Solució: 32

- 5) Ens han regalat un monopatí de quatre rodes. Les quatre rodes son iguals, però es desgasten de manera diferent, depenent de si les posem al davant o al darrere. Les rodes del davant s'han de canviar cada 300 km, i les del darrere, cada 500 km. Volem saber en quin moment hem d'intercanviar les rodes del davant per les del darrere per tal que toqui canviar les quatre rodes al mateix temps. Quants quilòmetres haurem fet amb el monopatí en el moment del canvi de rodes? (Si la resposta és un nombre enter, responeu aquest nombre. Si la resposta té decimals, arrodoniu el nombre a la primera xifra decimal i responeu amb totes les xifres sense la coma decimal, per exemple, si la solució és 340,17 responeu 3402)).

Solució: 1875

- 6) En un videojoc hi ha 95 personatges vermells i 19 personatges blaus. Aquests personatges es poden fusionar entre ells de la següent manera:
- Si es fusionen dos personatges vermells, es transformen en un de blau.
 - Si es fusionen dos personatges blaus, es transformen en quatre de vermells.
 - Si es fusionen un personatge de cada color, es transformen en tres personatges vermells.
- Si al final de la partida hi queden en total 100 personatges, com a mínim quants d'aquests personatges poden ser blaus? I com a màxim? (Doneu com a resposta la suma del màxim i el mínim)

Solució: 66

- 7) Quantes xifres té el nombre més petit que es pot formar amb uns i zeros i que és divisible per 792?

Solució: 21

- 8) Volem triar sis nombres enters i positius de manera que en qualsevol parella de nombres d'aquest conjunt sempre un d'ells és divisor de l'altre, excepte en el cas d'una única parella en que cap dels dos nombres és divisible per l'altre. Si anomenem n al nombre més gran del conjunt, quin és el valor més petit que pot tenir n ?

Solució: 24

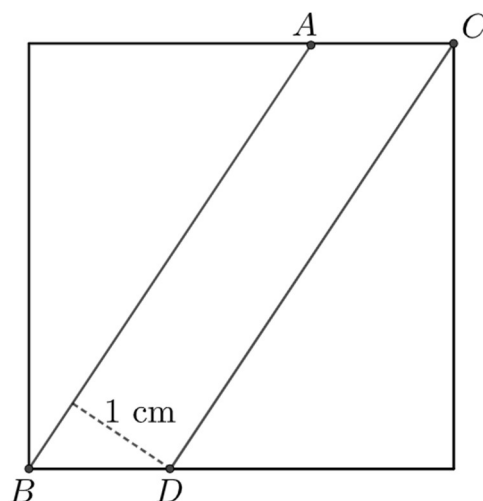
- 9) Cada nombre natural n té un nombre "pare", que és el nombre natural més petit tal que les seves xifres sumen n . Per exemple el "pare" de 30 és 3999, perquè 3999 és el nombre més petit, de tal manera que les seves xifres sumen 30. Si sumem tots els nombres de tres xifres que son "pare" d'algun altre nombre, quin resultat obtindrem?

Solució: 5391

- 10) Prenem tots els polinomis $p(x)$ de grau 5, en què tots els coeficients son 1, -1 o 0. Quants d'aquests polinomis compleixen que $p(1) = 1$?

Solució: 81

- 11) Un quadrat s'ha dividit en tres regions de la mateixa àrea, dos triangles rectangles i un paral·lelogram, de manera que els segments AB i CD són paral·lels i la distància entre els dos segments és d'1 cm, tal i com es veu en la imatge:



Quant val l'àrea del quadrat?

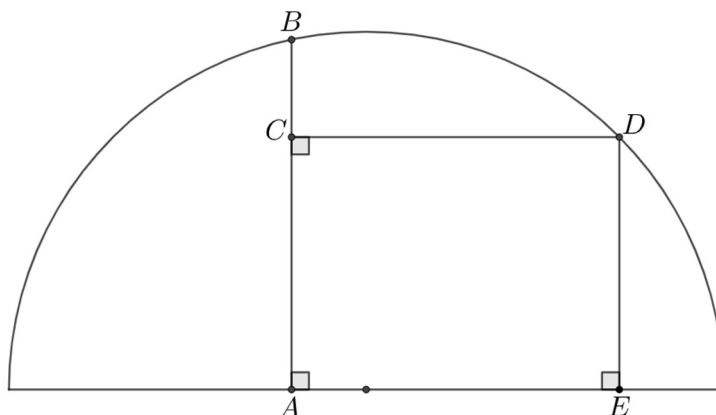
Solució: 13

- 12)

$$\begin{aligned}x + y &= 15 \\xy &= 19 \\x^2 + y^2 &= ?\end{aligned}$$

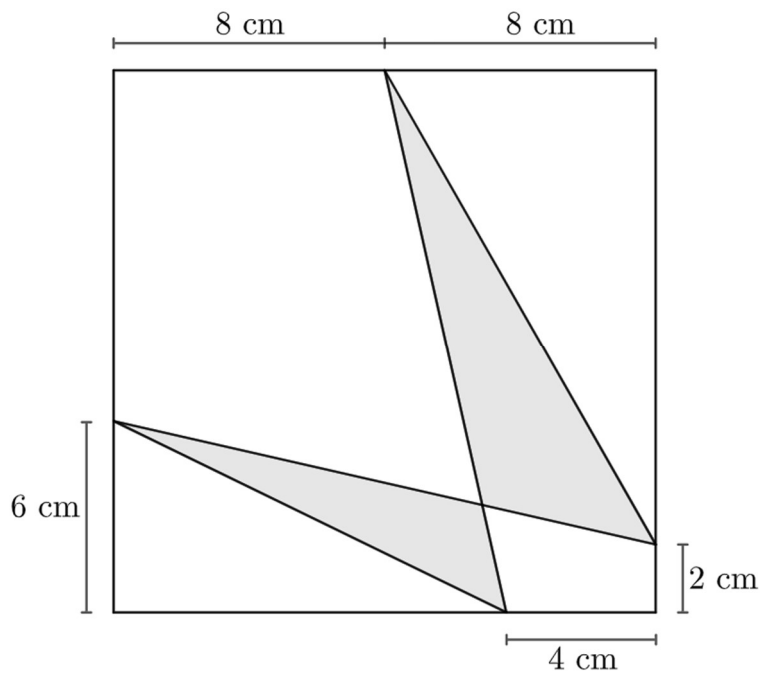
Solució: 187

- 13) Al semicercle d'aquesta figura, hi hem traçat uns segments. Si $\overline{AB} = 7$ cm, $\overline{CD} = 6$ cm i $\overline{DE} = 5$ cm, quant val l'àrea del semicercle? La solució és un múltiple de π . Doneu com a resposta aquest nombre sense π . És a dir, si per exemple, la solució és 40π , responeu 40. Si la resposta és decimal, doneu aquest nombre decimal arrodonit al nombre enter més proper. És a dir, si la solució és $4,86\pi$, responeu 5.



Solució: 25

- 14) A la figura hi podeu veure un quadrat i dos triangles ombrejats al seu interior. Quina és la diferència d'àrea entre els dos triangles ombrejats?



Solució: 12