Societat Catalana de Matemàtiques

https://www.aksf.org

Declaració institucional de *Le Kangourou sans Frontières*

Kangourou sans Frontières is an international association founded in France, which is formed by maths lovers from all over the world. Motivated by the importance of mathematics in the modern world, their passion is to spread the joy of mathematics, support mathematical education in school
and promote a positive perception of mathematics in society.
The main activity of *Kangourou sans Frontières* is designing the annual Kangaroo Mathematics Competition. Mathematical problems in multiple-choice form are offered to children of all school levels. The questions are not standard textbook problems and come from a large variety of topics. Besides inspiring ideas, perseverance and creativity, they require imagination, basic computational skills, logical thinking and other problem solving strategies. Often there are small stories, surprising questions and results, which encourage discussions with friends and family. The organisation of the competition in the individual countries is up to the members of Kangourou sans Frontières.

Dedicatòria

El 21 de març d'aquest 2024, milers i milers de nens i nenes, nois i noies, a Catalunya, Balears i el País Valencià van dedicar una bona estona a resoldre reptes matemàtics. De fet, el mateix dia, arreu del món, joves de més de 100 països també es van plantejar aquests reptes matemàtics. La coincidència, que no va ser pas casualitat, té un nom: Prova Cangur.

La Prova Cangur és un concurs internacional de resolució de problemes de matemàtiques, que organitza en català la Societat Catalana de Matemàtiques, com a membre de l'associació internacional *Kangourou sans Frontières* (AKSF). Aquest any n'hem celebrat la 29a edició.

Com diuen a l'AKSF: «les preguntes, a més d'idees inspiradores, perseverança i creativitat, requereixen imaginació, habilitats computacionals bàsiques, pensament lògic i altres estratègies de resolució de problemes». Resoldre problemes, descobrir-ne la solució, és un repte engrescador, una oportunitat per posar a prova i desenvolupar les competències matemàtiques.

Ara bé, el Cangur no és una activitat només d'un dia. Per una banda, la preparació i organització de la prova, imprescindible per fer-la possible, comença molt abans i cal agrair a la Comissió Cangur de la SCM la seva gran dedicació. L'èxit aconseguit és també de tothom que col·labora el dia de la prova, especialment el professorat dels centres escolars, que té a les seves mans transformar-ho en una activitat participativa i una festa de les matemàtiques. Per altra banda, el Cangur transcendeix el concurs i les activitats d'aquell dia: perdura com a activitat de lleure, de suport a l'aula i d'estímul del talent matemàtic, que després ha de continuar al llarg del curs, amb més activitats, siguin o no lúdiques o festives.

De tots nosaltres depèn que les matemàtiques les tinguem presents, no només aquest dia de festa i celebració. Aquesta publicació que teniu a les mans ens ho facilita, i és, doncs, un regal col·lectiu que compartim.

Montserrat Alsina i Aubach
Presidenta de la Societat Catalana de Matemàtiques

En el context de l'acte d'entrega de premis del Cangur 2024 i altres concursos de la SCM, com a activitat de divulgació matemàtica, els professors Enric Brasó i Sergio Belmonte (**mmaca**) suggereixen unes reflexions sobre què podem esperar pel que fa als resultats de les loteries del tipus 6/49.

En aquestes pàgines ho completem amb uns resultats numèrics en un cas més senzill i us podem dir que si voleu revisar el tema podeu accedir a un vídeo d'una conferència

https://www.cccb.org/ca/multimedia/videos/un-mati-amb-marcus-du-sautoy/230090

que l'eminent matemàtic i divulgador científic Marcus de Sautoy (Càtedra Simony, Universitat d'Oxford) va fer el dia 18 d'octubre de 2018, al CCCB en el marc de la *Biennal de pensament. Xerrades per a estudiants de secundària.* amb la presentació de Guido Ramellini (**mmaca**).

Marcus du Sautoy

1	2	3
1	2	4
1	2	5
1	2	6
1	2	7
1	2	8
1	3	4
1	3	5
1	3	6
1	3	7
1	3	8
1	4	5
1	4	6
1	4	7
1	4	8
1	5	6
1	5	7
1	5	8
1	6	7
1	6	8
1	7	8
2	3	4
2	3	5
2	3	6
2	3	7
2	3	8
2	4	5

2	4	8
2	5	6
2	5	7
2	5	8
2	6	7
2	6	8
2	7	8
3	4	5
3	4	6
3	4	7
3	4	8
3	5	6
3	5	7
3	5	8
3	6	7
3	6	8
3	7	8
4	5	6
4	5	7
4	5	8
4	6	7
4	6	8
4	7	8
5	6	7
5	6	8
5	7	8
6	7	8

A l'esquerra teniu les que serien totes les maneres possibles d'omplir una butlleta en una loto 3/8, és a dir, que dels nombres del conjunt {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} se n'haguessin de triar tres.

Sabríeu deduir per què en són 56?

Si ara us diuen quina ha estat la terna que correspon al premi però que hi ha premis parcials als que han encertat una xifra i als que n'han encertat dues en aquest cas es pot comptar directament la probabilitat, és clar.

Veuríeu que

- Una sola xifra encertada: 30 de 56, el 54%
- Dues xifres encertades i l'altra no: 15 de 56, el 27%

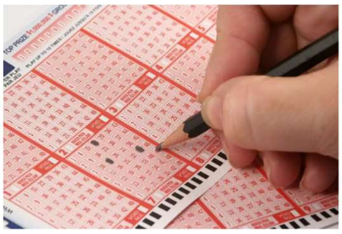
Sabríeu deduir-ho raonadament, sense revisar una a una les 56 ternes? Us sembla que el resultat és sempre el mateix sigui la que sigui la terna premiada?

Ara suggerim que penseu com ompliríeu una butlleta per a aquesta loto. Trieu mentalment tres nombres de l'1 al 8. Els heu triat de manera que n'hi hagi dos de consecutius? Podria ser molt bé que no. Acabem aquest anàlisi que es pot fer mirant tots els casos, un per un, amb aquesta dada:

- Tenen dues o tres xifres consecutives: 36 de 56, el 64%

Seran semblants els valors de la probabilitat en altres loteries?

En les situacions reals habitualment no serà possible tenir una llista completa de possibles butlletes i analitzar-les una per una. L'exemple més conegut és la Lotto 6/49, en què cal triar 6 nombres del conjunt {1, 2, 3,... ,47, 48, 49}.



Abans de començar la lliçó es demana al conjunt de persones assistents (aproximadament 600) que marquin 6 nombres en un tauler semblant al de la Lotto 6/49 i aleshores es fan recomptes, per tal de comparar la situació real que es dóna a la sala amb la probabilitat.

Aquí donem valors numèrics i suggerim als lectors que ja tenen recursos de combinatòria (coneixement dels nombres combinatoris) que mirin de calcular-los raonadament.
Es pot trobar una solució raonada en aquest enllaç: https://scm.iec.cat/wp-content/uploads/2024/02/solucionari.pdf)

- Nombre de possibilitats per a omplir una butlleta de la 6/49: 13.983.816
- Es pot calcular que, una vegada fet el sorteig, siguin els que siguin els números que han sortit, hi ha 6.096.454 butlletes sense cap encert. Aquests càlculs de probabilitat diuen que a un 44% d'apostes a la 6/49 "no els toca" encertar cap de les xifres del premi en el sorteig. Però alhora veiem que un 56% aproximadament tenen encertat un número o més. Analitzem-ho.
- El nombre de butlletes amb 3 encerts o més és de 260.624, que resulten de que amb exactament 6 o 5 o 4 o 3 xifres encertades són 1, 258, 13.545 i 246.820 casos respectivament. Aquests valors de 3 encerts o més corresponen a una de cada 54 persones. Però aquest tipus de reflexions sobre la probabilitat sempre s'han d'acompanyar del marge d'error en l'apreciació. I aquesta és la idea pràctica a la sala. Una de cada 54 serien $\frac{600}{54} \approx 11$. Ha estat així?
- El nombre de butlletes amb exactament 2 xifres encertades és de 1.851.150. Aquest valor, sumat als anteriors dona un valor que representa aproximadament 1/7 de les possibles apostes. A la sala, seran aproximadament 85 o 86, la setena part de 600

En la segona part de la lliçó es presentarà un dels aspectes que sempre sorprèn, i molt!, en els recomptes que es fan entre un grup de persones: l'anàlisi de la proporció de butlletes que tenen dos o més nombres consecutius. Ja hem dit que tothom haurà omplert una butlleta, sense cap comentari previ sobre el tema. L'experiència demostra que d'aquesta manera "hi ha poca tendència" a posar nombres seguits i per això, a la pràctica, s'acostuma a trobar una proporció més petita, o fins i tot molt més petita, que la probabilitat. Hi ha sorpreses!

- Probabilitat que una butlleta de la 6/49 tingui dos o més nombres consecutius: 49,52%

Podríem dir, visualment que l'atzar té una tendència a no repartir regularment. A la sala, s'haurà seguit aquesta idea (que probabilísticament hauria de complir aproximadament la meitat del públic) o més aviat la majoria de la gent haurà tendit a fer-ho més regular, sense posar nombres consecutius?

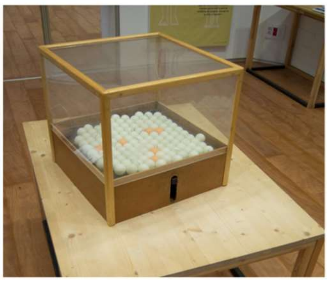
Enllacem, per acabar aquest resum amb el mòdul ***L'atzar no és regular*** de la sala Lluís Santaló del **mmaca**, on hi ha una urna amb unes 125 boles de les quals 6 són de color.

De forma natural esperem que l'atzar provoqui una ordenació regular.

Comprova com no és així: toca la palanca per fer saltar boles tantes vegades com vulguis.

Pots distribuir-les uniformement?

Veuràs com, quasi sempre, hi ha zones on s'acumulen boles de color i altres grans zones on no n'hi ha cap.



- Si ho voleu visualitzar amb menys boles (4 boles de color en un conjunt de 36 boles) teniu una aplicació geogebra: https://www.geogebra.org/m/yz4bqka9

Cangur 2024 de la SCM. Dades globals

El Cangur 2024 es va convocar en la data fixada internacionalment, el tercer dijous de març, que enguany queia en la data més tardana possible: el 21 de març.

Aquesta data era interessant perquè permetia celebrar el mateix dia el Cangur a Balears, a Catalunya i al País Valencià on la majoria d'anys el tercer dijous de març «xoca» amb les Falles. Però en canvi era per a nosaltres una data complicada perquè era el penúltim dia lectiu abans de les vacances de Setmana Santa. Després d'un debat en diferents àmbits es va decidir mantenir la data internacional.

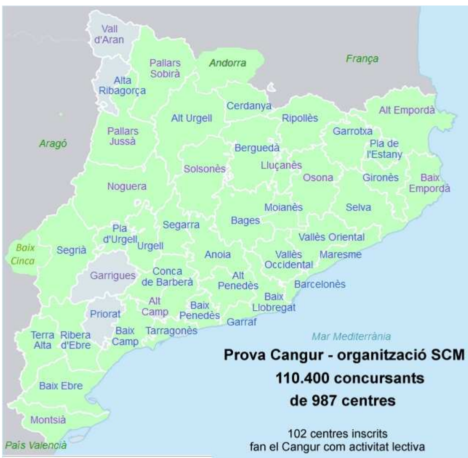
29è Cangur de la SCM: 21 de març de 2024

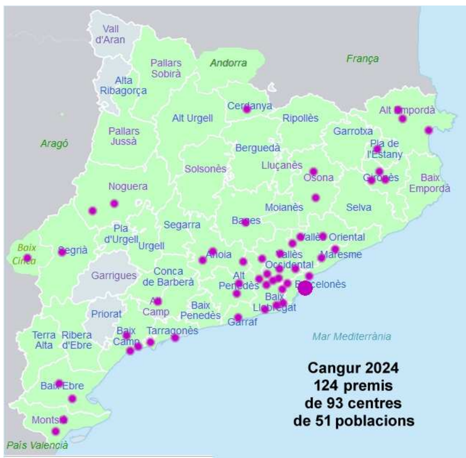
Sigui com sigui la taula de dades que es mostra tot seguit mostra una participació molt i molt valuosa. Cal que ens en felicitem i escau donar les gràcies a tot el professorat que ha impulsat l'activitat en els seus centres. Per valorar les dades següents és bo indicar que cada centre inscrit podia optar per desenvolupar el Cangur com una activitat pròpia del centre o bé participar-hi com a concurs. Aquesta segona opció va ser absolutament majoritària però als més de cent deu mil concursants se n'hi poden sumar uns quants milers que van treballar el Cangur a classe. Una participació extraordinària!

Cangur 2024	Nombre de concursants	Centres participants en el concurs		Centres inscrits
Cinquè d'EP	12.335	437		
Sisè d'EP	12.744	450	482	516
Primer d'ESO	23.585	676		
Segon d'ESO	21.337	681	699	731
Tercer d'ESO	17.873	680		
Quart d'ESO	14.172	627	704	735
1r batx + CFGM	5,142	381		
2n batx + CFGS	3.212	304	409	433
	110.400	987	987	1.089

La distribució geogràfica de la participació abasta pràcticament totes les comarques catalanes, a més d'uns centres d'Andorra i el Baix Cinca a l'Aragó.

Aquest fet ens omple de joia però aquesta sensació encara millora si pensem que en el Cangur 2024 s'han donat 124 premis (15 per cadascun dels vuit nivells escolars, que per alguns empats en el quinzè lloc han augmentat una mica) i que hi ha hagut 93 centres amb algun concursant amb premi, ben escampats geogràficament: són de 51 poblacions de 22 comarques.





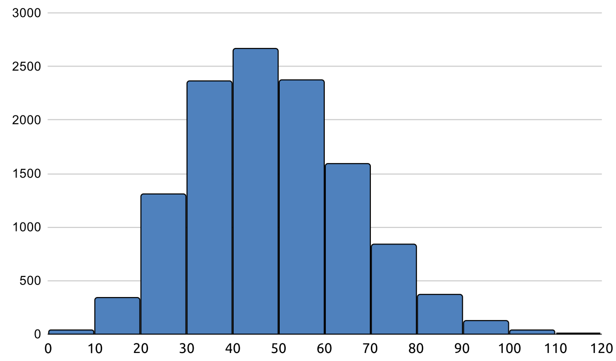
Cangur 2024. Dades sobre puntuacions i tants per cent d'encert

En l'anàlisi de les respostes es mostra una taula que dona els percentatges d'encert/en blanc/errada en cada grup de problemes i un diagrama de sectors que els dona per la globalitat de respostes.

5è d'EP. Puntuacions

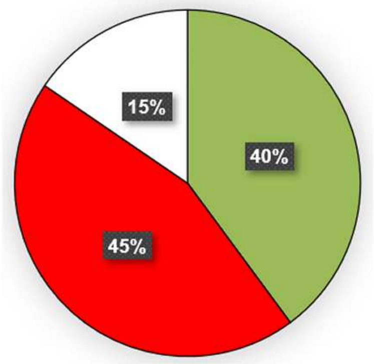
Mitjana (sobre 120): 48,2 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços
(sobre 30/40/50): 17,8 + 17,4 + 13 punts

Millor puntuació: 120 punts (encert complet)
Puntuació del millor 1%: 92,5 punts
Puntuació del millor 6%: 76,75 punts
Puntuació del millor 10%; 71,25 punts
Tercer quartil, millor 25%: 59,5 punts
Mediana: 47 punts



5è d'EP. Respostes

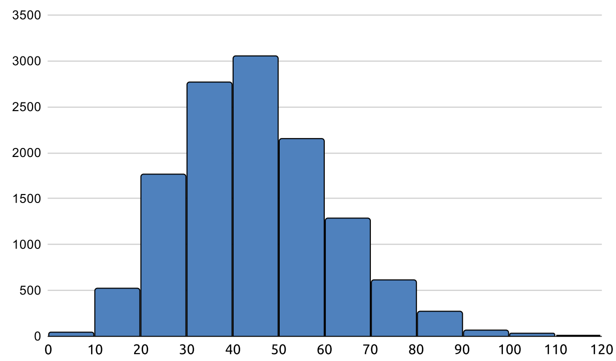
	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	58,06%	40,75%	20,80%
error	35,15%	46,07%	52,75%
en blanc	6,80%	13,17%	26,44%



6è d'EP. Puntuacions

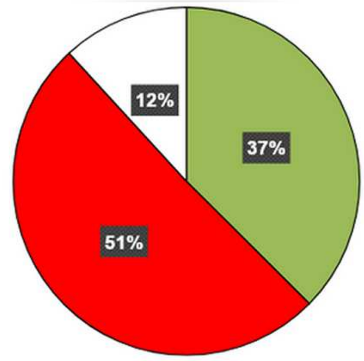
Mitjana (sobre 120): 44,8 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços
(sobre 30/40/50): 17,3 + 14,3 + 13 punts

Millor puntuació: 113,75 punts
Puntuació del millor 1%: 87,75 punts
Puntuació del millor 6%: 72,5 punts
Puntuació del millor 10%; 67 punts
Tercer quartil, millor 25%: 55 punts
Mediana: 43,75 punts



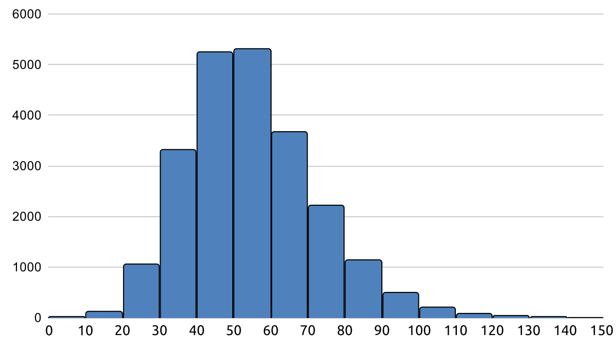
6è d'EP. Respostes

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	50,62%	32,49%	16,82%
error	42,11%	54,21%	63,44%
en blanc	7,26%	13,29%	19,73%



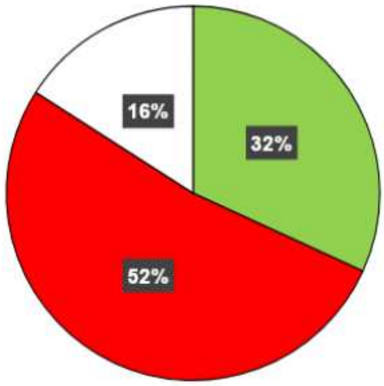
1r d'ESO. Puntuacions

Mitjana (sobre 150): 54,6 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços
(sobre 37,50/50/62,5): 19,4 + 17,7 + 17,5 punts
Millor puntuació: 150 punts (encert complet)
Puntuació del millor 1%: 103 punts
Puntuació del millor 6%: 83,25 punts
Puntuació del millor 10%; 77,4 punts
Tercer quartil, millor 25%: 65 punts
Mediana: 52,75 punts



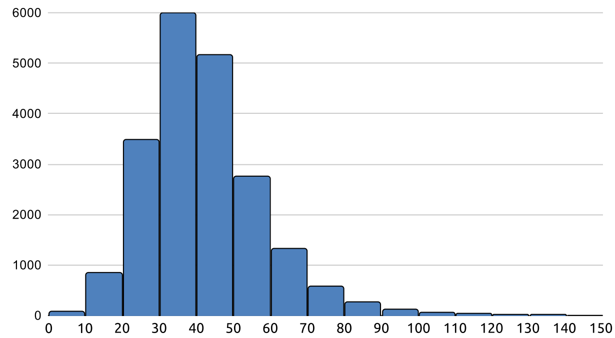
1r d'ESO. Respostes

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	50,43%	32,17%	12,92%
error	42,93%	52,16%	61,25%
en blanc	6,64%	15,66%	25,31%



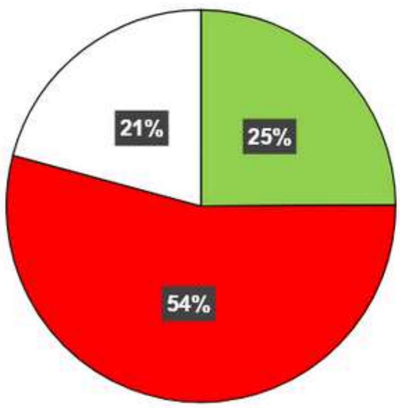
2n d'ESO. Puntuacions

Mitjana (sobre 150): 41,6 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços
(sobre 37,50/50/62,5): 13,5 + 15,5 + 12,7 punts
Millor puntuació: 141,25 punts
Puntuació del millor 1%: 90,41 punts
Puntuació del millor 6%: 67,75 punts
Puntuació del millor 10%; 61,75 punts
Tercer quartil, millor 25%: 49,75 punts
Mediana: 39,75 punts



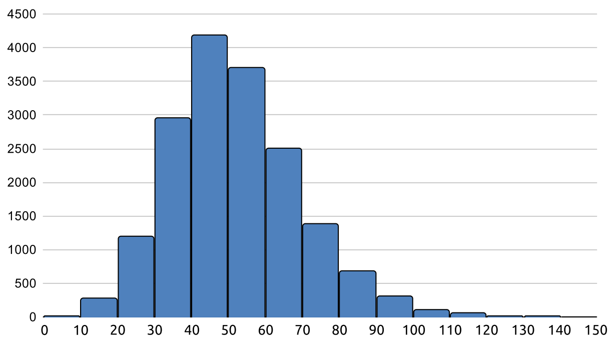
2n d'ESO. Respostes

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	33,58%	26,82%	14,31%
error	54,22%	52,74%	54,58%
en blanc	12,19%	20,43%	29,11%



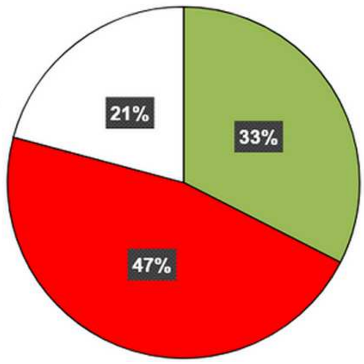
3r d'ESO. Puntuacions

Mitjana (sobre 150): 51,7 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços
(sobre 37,50/50/62,5): 20,4 + 14,1 + 17,2 punts
Millor puntuació: 143,75 punts
Puntuació del millor 1%: 98,75 punts
Puntuació del millor 6%: 80,75 punts
Puntuació del millor 10%; 74,75 punts
Tercer quartil, millor 25%: 62 punts
Mediana: 50 punts



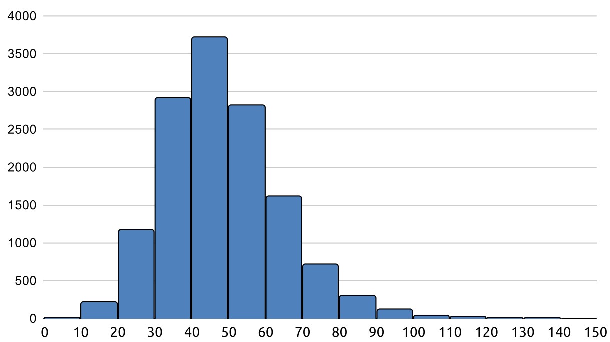
3r d'ESO. Respostes

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	52,48%	24,31%	20,77%
error	37,54%	56,66%	45,71%
en blanc	9,98%	19,04%	33,53%



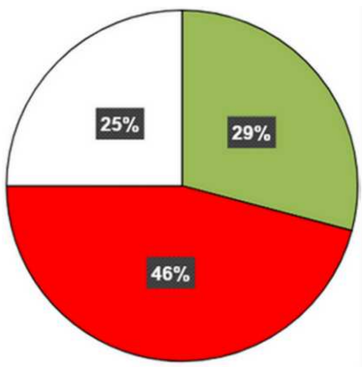
4t d'ESO. Puntuacions

Mitjana (sobre 150): 48,4 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços
(sobre 37,50/50/62,5): 17,9 + 14,7 + 15,8 punts
Millor puntuació: 138,75 punts
Puntuació del millor 1%: 95 punts
Puntuació del millor 6%: 75 punts
Puntuació del millor 10%; 69 punts
Tercer quartil, millor 25%: 58 punts
Mediana: 50 punts



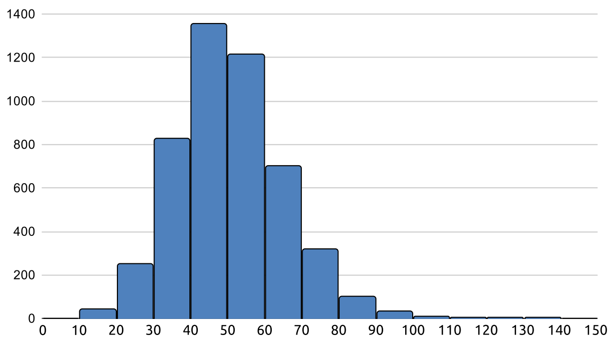
4t d'ESO. Respostes

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	45,27%	24,31%	17,78%
error	11,64%	25,91%	37,49%
en blanc	43,09%	49,77%	44,73%



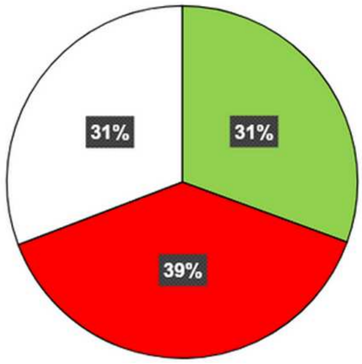
1r de batxillerat. Puntuacions

Mitjana (sobre 150): 50,76 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços
(sobre 37,50/50/62,5): 20,73 + 17 + 13 punts
Millor puntuació: 15032,5 punts
Puntuació del millor 1%: 92 punts
Puntuació del millor 6%: 75 punts
Puntuació del millor 10%; 70,5 punts
Tercer quartil, millor 25%: 60,25 punts
Mediana: 50,75 punts



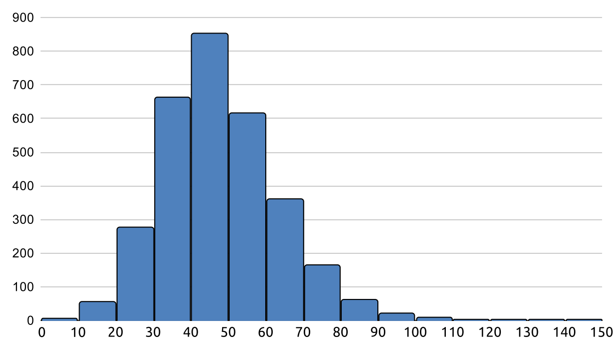
1r de batxillerat. Respostes

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	52,59%	27,23%	11,30%
error	35,33%	39,79%	41,30%
en blanc	12,07%	32,98%	47,40%



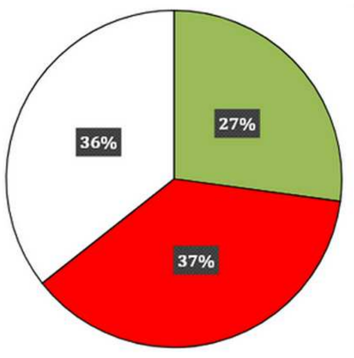
2n de batxillerat. Puntuacions

Mitjana (sobre 150): 47,8 punts
Mitjanes de les puntuacions per terços
(sobre 37,50/50/62,5): 18,9 + 15,2 + 13,7 punts
Millor puntuació: 140 punts
Puntuació del millor 1%: 90 punts
Puntuació del millor 6%: 72,75 punts
Puntuació del millor 10%; 68 punts
Tercer quartil, millor 25%: 56,75 punts
Mediana: 46,5 punts



2n de batxillerat. Respostes

	de 3 punts	de 4 punts	de 5 punts
encert	47,22%	22,49%	11,66%
error	36,41%	37,40%	35,71%
en blanc	16,31%	40,05%	52,56%



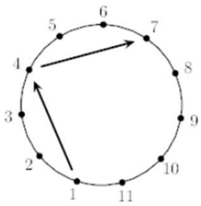
Cangur 2024. Anàlisi d’alguns problemes

L’equip que ha elaborat l’estudi estadístic que es pot veure en les pàgines anteriors (Nèstor Abad, Dani Bosch i Manel Martínez, membres de la comissió Cangur de la SCM) aporta uns comentaris sobre el grau d’encert en alguns dels problemes proposats en la prova Cangur 2024 de la SCM i suggereix idees per als lectors interessats en la solució.

Cinquè

En el problema 5 hi va haver un 62% dels concursants que van donar un resultat equivocat.

5. Els jugadors d’un equip de futbol es disposen formant un cercle i s’ordenen pels dorsals, de l’1 a l’11. El jugador 1 comença passant la pilota al tercer jugador que té a l’esquerra. El que la rep fa el mateix i així se la van passant fins que algun jugador toca la pilota per segona vegada i s’atura el joc. Quin dorsal té el jugador que fa l’última passada?



A) 1 B) 5 C) 7 D) 9 E) 11

Es pot veure que el 55% de les respostes errònies van assenyalar l’opció A) i això suggereix que tal vegada hi va haver una lectura massa ràpida de l’enunciat que va fer pensar que el que es demanava era en quin jugador s’atura el joc, que efectivament és l’1. Però en realitat a l’1 li fa l’última passada el 9.

El problema 17, “*del pingüí*”, que va sortir en diferents nivells, a cinquè va ser el problema que va tenir un percentatge més alt d’error, el 64%, i el d’encert va ser només del 20%.

17. Un pingüí surt a pescar cada dia per alimentar les seves dues cries. Torna quan ha pescat 9 peixos. En dona 5 a la primera cria que es troba i 4 a l’altra. Durant els darrers dies una de les cries ha menjat 26 peixos. Quants n’ha menjat l’altra cria?

A) 19 B) 22 C) 25 D) 28 E) 31

A sisè el percentatge d’error va ser del 55% i el d’encert del 30%. El mateix enunciat, però amb dades numèriques diferents, es va proposar també a 3r i a 4t d’ESO i en aquests nivells els tants per cent d’error van ser semblants, en ambdós casos a prop del 50 %. Pel que fa a l’encert el 27% a 3r i el 32% a 4t.

Sisè

Es dona el cas que el problema 5 de sisè també va ser sorprenent pel poc encert, que va ser només del 12% i hi va haver un 63% de respostes equivocades.

5. En Pol tira dos daus normals idèntics sense que l’Olívia els vegi. Després li diu el producte dels dos daus a l’Olívia i ella endevina, immediatament, els dos nombres que han sortit. Quina d’aquestes opcions ha estat la tirada?

A) Un 3 i un 4 B) Un 3 i un 5 C) Un 1 i un 6 D) Un 2 i un 6 E) Dos 2

Dels que han donat una resposta errònia quasi un 70% han optat per l’opció E). El producte dels dos daus en aquest cas és 4 i no es van adonar que també es podria haver obtingut si hagués sortit un 1 i un 4.

A sisè el problema amb menys percentatge d’encert (el 5%) i alhora el màxim tant per cent d’error (un 80%) va ser el problema 16. Aquest problema també es va proposar a 2n d’ESO i en aquest nivell els resultats poc que van ser gaire millors: 8% d’encert i 71% d’error.

16. El nombre de quatre xifres 2 024 té tres propietats especials: totes les xifres són nombres parells; té tres xifres diferents, una de les quals està repetida, i l’última xifra és igual a la suma de les tres primeres. Quants nombres de quatre xifres (inclòs el 2 024) tenen aquestes tres propietats?

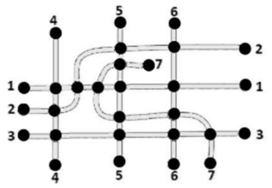
A) 2 B) 4 C) 6 D) 7 E) 8

Un 75 % dels errors s’han concentrat en les opcions A) i B). Algunes consideracions que es podrien fer com a pas previ per a resoldre’l i millorar l’encert: el 6 no hi surt, el 0 no pot ser ni la primera ni l’última xifra ni es pot repetir i el 8 només pot ser l’última.

Primer d’ESO

En aquest nivell els problemes 17 i 18 són els que més errades han patit, al voltant del 72%, amb uns percentatges similars en els encerts. Vegem els enunciats:

17. La figura mostra el plànol de les 7 línies d’autobús que hi ha en una ciutat. Els cercles negres indiquen les parades. Volem pintar les línies de colors, però no cal que siguin totes de colors diferents, sinó que únicament s’ha de complir que si dues línies coincideixen en alguna parada, aquestes línies tinguin colors diferents. Quin és el nombre mínim de colors que es necessiten per a pintar-les?



A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Potser en aquest problema hagués estat útil per a la mainada pintar les línies 1 i 3, que no tenen coincidències, d’un mateix color; i les línies 4, 5 i 6, que tampoc no tenen coincidències entre si, d’un altre color. Les línies 2 i 7 tampoc coincideixen. Tindrien un tercer color.

18. En Pep té a l’armari quatre tasses diferents que va, cadascuna, aparellada amb un plat amb el mateix dibuix.

Agafa les tasses a cegues i les posa als quatre plats, de manera aleatòria. Quina de les frases següents és correcta?

A) És segur que cap de les tasses no està col·locada en el seu plat corresponent.
B) És segur que exactament una de les tasses està col·locada en el seu plat corresponent.
C) És impossible que exactament dues de les tasses estiguin col·locades en el seu plat corresponent.
D) És impossible que exactament tres de les tasses estiguin col·locades en el seu plat corresponent.
E) És impossible que totes les tasses estiguin col·locades en el seu plat corresponent.

En aquest cas és important el significat que l’adverbi *exactament* aporta a l’oració. Podria ser que tres de les tasses estiguessin col·locades en el seu plat corresponent, però exactament tres de les tasses?

Comentem també el problema 10 que, tot i tenir una puntuació de 3 punts, ha estat un dels problemes en què més concursants han deixat la resposta en blanc (gairebé un 60%).

10. Les habitacions d’un hotel estan numerades a partir de l’1 en ordre ascendent. No s’omet cap número. El Cangur va passar per totes les habitacions i va comptar que en total hi havia catorze dígits 2 i tres dígits 5. Quantes habitacions hi pot haver a l’hotel, com a màxim?

A) 32 B) 31 C) 33 D) 35 E) 34

Podria ser que no s’hagués parat prou atenció en la diferència entre dígit i número. Pensar quantes vegades apareix el dígit 2 en el conjunt de números que van del 20 al 29 pot ajudar.

Segon d’ESO

El problema 3 ha tingut un percentatge molt elevat d’errades (68,63%), més que molts problemes de la mateixa prova valorats amb 5 punts.

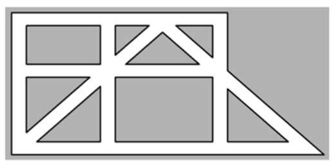
3. A partir de l’1 en Pau compta de tres en tres: 1, 4, 7, 10…, i l’Ona ho fa de quatre en quatre: 1, 5, 9, 13… Quin serà el primer nombre més gran de 2 024 que diran els dos?

A) 2 026 B) 2 041 C) 2 029 D) 2 040 E) 2 028

Es tracta d’un problema de divisibilitat en què tots els nombres d’en Pau són el posterior dels múltiples de 3 i els de l’Ona són el posterior dels múltiples de 4. Per tant els nombres si restem una unitat a un nombre que hagin dit tots dos resulta un nombre divisible per 3 i per 4 alhora, és a dir per 12.

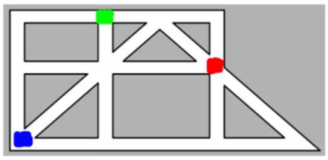
En la mateixa línia trobem el problema 9, amb un percentatge d’errades del 74,37%. El segon problema amb més errades de tota la prova.

9. L’alcalde de Quadratsburg ha d’organitzar la vigilància del barri de la Pitagorneda. Ha de procurar que tots els carrers que veiem al plànol quedin vigilats sota l’atenta mirada dels vigilants, que no es podran moure del seu lloc de guaita. A més, han de seguir la instrucció que en cap carrer no hi pot haver dos vigilants. Quina és la quantitat mínima de vigilants que necessitarà?



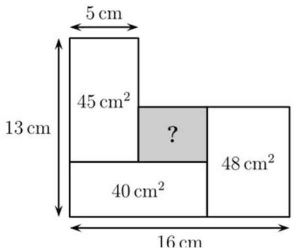
A) 3 B) 4 C) 5 D) 6 E) 7

Aquí calia reflexionar que posar els guaites en els encreuaments de carrers permetrà optimitzar la quantitat de vigilants necessaris. Aleshores veiem que amb tres en farem prou perquè tots els carrers quedin vigilats.



El problema 14 destaca per ser el més encertat entre els problemes de 4 i 5 punts. Ha obtingut un percentatge d'encert pràcticament del 60 %. Es tracta d'un problema geomètric amb fortes connexions amb el sentit numèric i la divisibilitat.

14. Quina és l'àrea de la regió grisa?



A) $12\,\text{cm}^2$ B) $14\,\text{cm}^2$ C) $16\,\text{cm}^2$ D) $18\,\text{cm}^2$ E) $20\,\text{cm}^2$

Del rectangle de 45 cm^2 podem deduir que té una altura de 9 cm. D'aquesta manera, i gràcies al rectangle de 40 cm^2 , com que tindrà una altura de 13-9 = 4 cm, la seva base serà de 10 cm. Ara ja estem en condicions de trobar la base de la regió grisa; i mitjançant els rectangles de 48 i 40 cm^2, podrem deduir la seva altura.

Tercer d'ESO

El problema 18 de l'opció A (17 de l'opció B) va tenir un percentatge d'encert de només el 2% (el més baix de tots els nivells) i el 81% d'error. Es pot comentar que també es va proposar a 4t (problema 16) i allà només el van encertar el 3% amb un percentatge d'error del 82%. Amb unes dades una mica diferents es va proposar a 2n d'ESO (problema 30) i aquí, en canvi, hi va haver un 6% d'encert i un 76% d'error.

18. El 88 % del pes d'un bolet acabat de collir és aigua. En canvi, el percentatge d'aigua en un bolet assecat és, només, del 20 %. En quin percentatge disminueix el pes d'un bolet durant el procés d'assecatge?

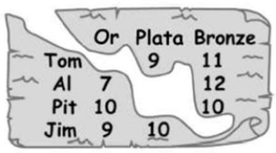
A) 68 % B) 76 % C) 80 % D) 82,4 % E) 85 %

Un 75% dels que han contestat la pregunta han optat per l'opció que indicava el 68 %, que seria el resultat de restar 88 – 20. En el cas de 4t van optar-hi el 71%. Ja és sabut que els càlculs amb percentatges enganyen, que cal anar amb molt de compte amb les operacions que hi fem i a quin total es refereix cada percentatge. Un suggeriment: podria ser millor començar suposant que tenim un bolet que pesa 100 gr

---

El problema 20 és el segon problema que té el percentatge d'error més alt: 72 % (encert del 16%). També es va proposar a segon (problema 26) i el percentatge d'error va ser del 65% (encert del 12%). Vegeu que a segon el problema va "desconcertar" més, amb un 22% de respostes en blanc, en un problema que no semblava que hagués de resultar tan complicat.

20. El capità Flint va demanar als seus pirates que escrivissin en un full de paper quantes de les 30 monedes que hi havia al cofre del tresor eren d'or, quantes eren de plata i quantes de bronze. Les seves respostes van ser les que es mostren en la imatge, però, desgraciadament, una part del paper es va fer malbé. Només un dels quatre pirates va dir la veritat. Els altres van dir mentides en totes i cada una de les quantitats que van escriure. Qui va dir la veritat?



A) Jim B) Pit C) Al D) Tom E) No ho podem saber amb seguretat.

Aquí a tercer un 65 % dels que l'han respost han optat per l'opció que indicava: "*No ho podem saber amb seguretat*". Una vegada omplert el full pensant que cada pirata ha dit tres nombres que sumen 30 el que cal considerar és que els que menteixen ho fan en totes i cada una de les quantitats que diuen.

- En la secció següent d'aquesta publicació els concursants amb premi de podi comenten el problema que més els ha agradat. Un dels problemes que han triat és aquest, amb un interessant comentari.

Quart d'ESO

Comencem aquests comentaris amb el problema 2. El tant per cent d'error d'aquest problema va ser del 50% i el d'encert d'un 32%. Ben cert que no són les dades que hem d'esperar del segon enunciat proposat en la prova.

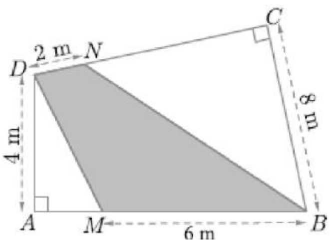
2. En Magí agafa cada dia el mateix número d'autobús i el compara amb el número de la data del dia. Un dia observa que el número de l'autobús és una unitat més gran que el de la data. Després s'adona, sorprès, que el dia abans el número de l'autobús era més petit que el de la data corresponent. Quin és el número de l'autobús?

A) 1 B) 2 C) 3 D) 30 E) 31

Probablement és dels enunciats que necessiten més d'una lectura o en tot cas d'una de molt pausada. Fet això, una estratègia pot ser anar descartant les opcions de resposta que no compleixin les dues observacions que en Magí fa i adonar-se que hem de pensar molt acuradament en el canvi de mes.

Sense considerar el problema 16 que ja s'ha comentat en l'estadística de 3r d'ESO, el problema de 4 punts que ha obtingut menys encert, exactament el 15%, és el problema 15.

15. En el quadrilàter $ABCD$ de la figura, que té els angles A i C rectes, hi ha indicats un punt M en el costat AB, i un punt N en el costat CD, i les distàncies $ND = 2\,\text{m}$, $DA = 4\,\text{m}$, $MB = 6\,\text{m}$, $BC = 8\,\text{m}$. Quina és l'àrea del quadrilàter gris $MBND$?



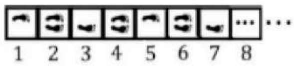
A) $36\,\text{m}^2$ B) $32\,\text{m}^2$ C) $24\,\text{m}^2$ D) $20\,\text{m}^2$ E) $18\,\text{m}^2$

- Aquest és un altre dels problemes que apareix en la col·lecció triada per alumnes de pòdium. Per als lectors que potser han errat aquest problema els diem que veuran una estratègia guanyadora en l'aportació que hi fa el guanyador del Cangur de 4t d'ESO.

Primer de batxillerat

El problema de 3 punts amb un percentatge d'error més alt, d'un 54%, va ser el que indiquem tot seguit, que va tenir un percentatge d'encert del 44%, és a dir que gairebé no hi va haver respostes en blanc..

4. Un joc de saltar es juga de la manera següent: cada persona salta d'un quadrat al següent, alternant entre peu esquerre - ambdós peus - peu dret - ambdós peus - peu esquerre - ambdós peus..., i així successivament, com es mostra en la figura. La Maia va començar amb un salt amb el peu esquerre com s'ha indicat i va saltar exactament 48 quadrats. Quantes vegades ha tocat a terra el seu peu esquerre?

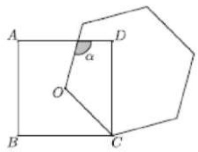


A) 12 B) 24 C) 36 D) 40 E) 48

Molt possiblement la majoria d'errades provenen del fet de no haver encertat a veure que el patró que hem de considerar és de 4 salts.

El problema de tres punts que va enganyar més va ser la determinació d'un angle entre un quadrat i un hexàgon. És el que menys participants van contestar (un 66%), i el que menys encert va tenir (un 27%). És el problema 9 de l'opció A i 10 de l'opció B.

9. Dibuixem un quadrat amb vèrtexs A, B, C, D i un hexàgon regular que té un costat OC, en què O és el centre del quadrat. Quina és la mesura de l'angle α?

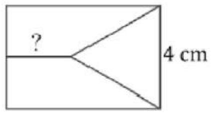


A) 105° B) 110° C) 115° D) 120° E) 125°

A 4t d'ESO també es va proposar aquest problema, allà com a problema de 4 punts. Igual que a 1r de Batxillerat el van contestar un 66% i el percentatge d'encert va ser una mica més baix (un 22%)

De 4 punts, el problema amb un percentatge més baix d'encert: 10% i més alt d'error: 60%, va ser el problema 11

11. Un rectangle es divideix en tres regions amb la mateixa àrea. Una de les regions és un triangle equilàter de 4 cm de costat i les altres dues són trapezis, com es mostra en la figura. Quina és la longitud, en cm, del més petit dels costats paral·lels dels trapezis?



A) $\sqrt{2}$ B) $\sqrt{3}$ C) 2 D) $2\sqrt{2}$ E) $2\sqrt{3}$

El problema de lògica que teniu tot seguit va ser el que va tenir un percentatge d'error més alt, un 67%, amb un tant per cent d'encert només del 19%.

22. En Carles diu la veritat un dia, menteix l'endemà, torna a dir la veritat el tercer dia, i així, successivament. Un dia, va fer exactament quatre de les cinc afirmacions següents. Quina és segur que no va fer?

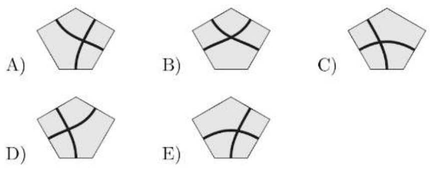
A) Vaig mentir ahir i demà mentiré.
B) Avui dic la veritat i demà diré la veritat.
C) 2 024 és divisible per 11.
D) Ahir era dimecres.
E) Demà serà dissabte.

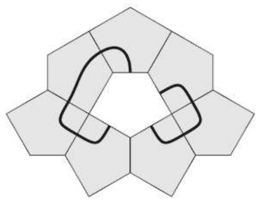
El 70% dels que van donar la resposta errònia van optar per l'afirmació: "*Avui dic la veritat i demà diré la veritat*". Calia interpretar bé que hi havia dues possibilitats, que quatre frases fossin correctes i una no, o que quatre fossin incorrectes i una correcta. Però C) és correcta i això ajuda!

Segon de batxillerat

El problema més encertat va ser l'1, amb un 68% d'encert. Bona tria del primer problema de la prova!

1. La figura de la dreta està feta amb pentàgons irregulars iguals. Quina de les peces següents, quan la posem en el pentàgon central que falta, dona lloc a un únic camí amb un encreuament a la rajola posada?





El problema més fallat va ser el 21, amb un 60% d'error.

21. Tenim 6 targetes amb un nombre escrit a cadascuna de les seves cares. Els parells de nombres a les targetes són (5, 12), (3, 11), (0, 16), (7, 8), (4, 14) i (9, 10). Si col·loquem una carta diferent (mostrant la cara que vulguem) a cada espai blanc de la figura, quin és el nombre més petit que podem obtenir com a resultat?

$$\square + \square + \square - \square - \square - \square = ?$$

A) −23 B) −24 C) −25 D) −26 E) −27

Tanmateix, està seguit de prop pel problema 6 amb un 57% d'error! Sembla que una operació amb potències de 2 havia de permetre simplificar $16^{15}+16^{15}+16^{15}+16^{15}$ correctament, però no va ser així!

El problema que més alumnes van deixar en blanc va ser el 25 (66% sense respondre) que, a més, també té el percentatge d'encert més baix (2,91%):

25. Un polinomi p compleix la relació $p(x+1) = x^2 - x + 2 \cdot p(6)$ per a qualsevol valor real de x. Quina és la suma dels coeficients de p?

A) −40 B) −6 C) 12 D) 40 E) Cap de les anteriors

I el problema "sorpresa negativa" del 1r bloc, amb només un 21,2% d'encert, va ser el 9:

9. El Blai comença amb el nombre 1 i el multiplica per 6 o per 10. Després multiplica el resultat per 6 o per 10 i continua el procediment diverses vegades. Quin dels nombres següents no pot haver obtingut?

A) $2^{100}3^{20}5^{80}$ B) $2^{90}3^{20}5^{80}$ C) $2^{90}3^{20}5^{70}$ D) $2^{110}3^{80}5^{30}$ E) $2^{50}5^{50}$

Alguns problemes triats

Hem demanat a les noies i els nois que han obtingut premi de pòdium en el 29è Cangur de la SCM que escullin un problema del concurs que han fet amb èxit i que ens diguin la idea-clau que els ha ajudat. En les pàgines següents podeu trobar la selecció que han fet i les idees que han donat.

Cinquè de primària

Triat per Lea Brossa Park (Escola L'Avet, Terrassa).

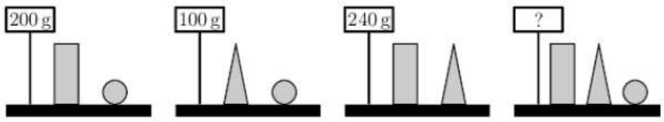
9. Tenim cinc bols de fruita diferents: un amb albercocs, un altre amb cireres, un tercer amb préssecs, el quart amb maduixes i l'últim amb figues. A l'Andrea només li agraden els préssecs; al Biel li agraden totes les fruites; a la Cinta només li agraden els préssecs i les figues; a la Duna, només les cireres i les figues, i a l'Eloi, només les cireres i les maduixes. Cadascú rep un bol diferent d'una fruita que li agrada. Quina fruita rep en Biel?

A) Albercocs B) Cireres C) Préssecs D) Maduixes E) Figues

Tinc en compte que a l'Andrea només li agraden els préssecs i, per tant, ella ha de tenir els préssecs. En Biel, com que li agrada tota mena de fruita, el reservem pel final per donar-li la fruita que quedi. A partir d'aquest punt anem fent deduccions, com per exemple, que si a la Cinta li agraden els préssecs i les figues, ha de tenir les figues ja que l'Andrea té els préssecs. I així trobo elements definitoris per tal de deduir la resposta.

Triat per Enric Solaz Moreno (El Clot, Barcelona).

18. La Llúcia té tres blocs de formes diferents. Primer els pesa de dos en dos i obté els pesos que es veuen en la bàscula. Quant pesen els tres blocs junts?

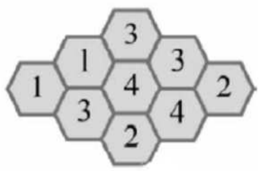


A) 270 g B) 280 g C) 290 g D) 300 g E) 310 g

La clau d'aquest problema és que, com que hi ha dos blocs de la mateixa forma entre les tres bàscules que tenen el pes, has de sumar el pes de les tres bàscules i dividir tot entre dos. Així et dóna el resultat de la bàscula que té els tres blocs diferents.

Triat per Arnau Martínez-Quintanilla Martínez (El Clot, Barcelona).

22. La figura mostra un rusc amb 9 cel·les. Hi ha mel a algunes de les cel·les. El nombre de cada cel·la mostra el nombre de cel·les veïnes que contenen mel. Dues cel·les són veïnes si tenen un costat comú. En total, quantes cel·les del rusc tenen mel?



A) 4 B) 5 C) 6 D) 7 E) 8

Per fer aquest exercici s'han de buscar les cel·les en què coincideix el nombre de dins amb el nombre de cel·les adjacents. Per exemple, pots començar pel nombre 2, que està a la dreta. Ombreja les dues cel·les adjacents al número 2. Fes el mateix amb els altres nombres i tingues en compte les cel·les que ja saps que tenen mel.

Sisè de primària

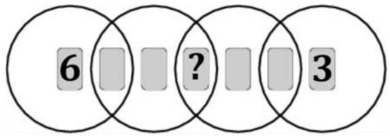
Els premiats Adrià Piqué Gracia (Betània-Patmos, Barcelona), i Joan Llauradó Brunet (Escola Carles III, Sant Carles de la Ràpita) han triat el problema 11 de sisè, que és el de les bàscules, que hem vist suara comentat per un concursant de cinquè. Les idees que han exposat són les següents:

- Adrià: Em vaig fixar en les opcions que hi havia i tenint-les en compte vaig descartar les que no podien ser. Si el rectangle i la rodona pesen 200 g junts, el primer resultat que diu que entre tots pesen 270 g vol dir que el triangle pesa el que quedi per a arribar a 270g. A partir d'aquí ja sabia un dels pesos i vaig anar descartant totes les altres opcions.

- Joan: He escollit este problema perquè m'agrada molt provar diferents possibilitats i anar descartant per a arribar a la solució. La idea era fer això fins a poder assegurar el pes d'una de les figures eliminant les parts iguals al fer la comparativa i a partir d'aquí la resta és només anar completant i comprovant els diferents pesos.

Triat per Julià Laudo Serrano (Institut Escola Sant Felip Neri, Barcelona)

7. Hi ha set cartes numerades de l'1 al 7. Estan col·locades en quatre cercles superposats, tal com es mostra en la figura. La suma dels nombres de cada cercle és 10. Quin nombre hi ha a la carta amb l'interrogant?



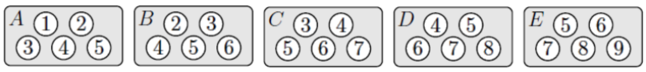
A) L'1 B) El 2 C) El 4 D) El 5 E) El 7

He escollit el problema 7 perquè m'ha semblat un dels problemes més interessants de les proves d'aquest any. M'ha agradat perquè era com una mena d'enigma. Crec que mereix ser una qüestió de 4 punts, no de 3, ja que és de les més difícils d'aquesta categoria. Utilitza sumes senzilles per un problema de deducció complex. Era un problema molt entretingut que connecta la diversió amb les matemàtiques.

Primer d'ESO

Triat per Natalia Herencia Ruiz (Col·legi Bon Salvador de Sant Feliu de Llobregat).

11. En acabar un sopar una família obre 5 capses de bombons etiquetades amb les lletres A, B, C, D i E, i plenes amb bombons de gustos diferents, indicats per mitjà de números:



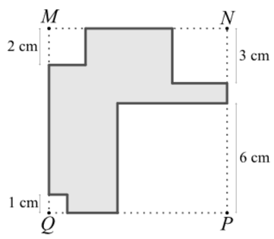
Entre tota la família es van menjar quatre bombons de cada capsa i en van deixar només un en cada una: un bombó de l'1, un bombó del 2, un bombó del 3, un bombó del 4 i un bombó del 5.
En quina capsa va quedar el bombó del 5?

A) Capsa A B) Capsa B C) Capsa C D) Capsa D E) Capsa E

Un dels problemes que em va agradar més va ser el número 11 (del model de prova B). Per resoldre'l, vaig utilitzar la lògica: si només poden quedar bombons de l'1 al 5 i a la caixa E només hi ha bombons del 5 al 9, l'única opció de bombó que tenen per deixar en aquesta capsa és la del 5.

Triat per Oleguer Jové Fernández (Col·legi El Carme de Tarragona).

22. En un quadrat $MNPQ$ de paper gris en Jesús ha retallat un quadrat en cada cantonada, amb les mesures d'1 cm, 2 cm, 3 cm i 6 cm, que s'indiquen en la imatge de la dreta. Si l'àrea de la figura de paper que li queda és igual a l'àrea de la part retallada, quin és el perímetre de la figura grisa?



A) 36 cm B) 40 cm C) 44 cm D) 48 cm E) 52 cm

La idea clau seria adonar-se que si calcules les àrees de les parts retallades és exactament la meitat de l'àrea del quadrat gran, ja que diu que totes dues són iguals. Sabent l'àrea del quadrat gran, podem obtenir el valor del costat del quadrat, i en tractar-se d'un quadrat el seu perímetre es multiplica per quatre. El problema m'ha agradat perquè no només és aplicar fórmules d'àrees sinó que al mateix temps implica raonar i visualitzar la figura des d'un altra perspectiva.

Triat per Arnau Molina López (Institut Joan Ramon Benaprès de Sitges).

28. En Daniel vol tallar una corda en 12 trossos iguals i marca els punts per on hauria de fer els talls. En Mohamed vol tallar la mateixa corda en 16 trossos iguals i també marca els punts per on hauria de fer els talls. Aleshores l'Amaia talla la corda per tots els punts marcats. En quants trossos talla la corda l'Amaia?

A) 24 B) 25 C) 27 D) 28 E) 29

La tercera marca del Daniel coincideix amb la quarta del Mohamed. Aquest patró es repeteix quatre vegades. Vaig dibuixar aquest primer tram, vaig comptar els trossos de corda, 6, i vaig multiplicar el resultat per quatre. En total 24.

Segon d'ESO

Triat per Magí Solà Puig (Institut Les Margues, Calldetenes)

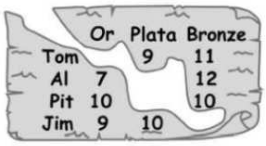
23. Un cub té la propietat que el seu volum, en cm^3, té el mateix valor numèric que la seva àrea total en cm^2. Quant mesura l'aresta del cub?

A) 1 cm B) 2 cm C) 4 cm D) 5 cm E) 6 cm

Vaig plantejar una equació en què el volum del cub fos igual a la seva àrea total: $x \cdot x \cdot x = x \cdot x \cdot 6$ i això només era vàlid per $x = 6$. Aquest problema em va agradar perquè al principi semblava molt més complicat del que és en realitat.

Triat per Albert Farrús Anguita (Institut Leonardo da Vinci, Sant Cugat del Vallès)

26. El capità Flint va demanar als seus pirates que escrivissin en un full de paper quantes de les 30 monedes que hi havia al cofre del tresor eren d'or, quantes eren de plata i quantes de bronze. Les seves respostes van ser les que es mostren en la imatge, però, desgraciadament, una part del paper es va fer malbé. Només un dels quatre pirates va dir la veritat. Els altres van dir mentides en totes i cada una de les quantitats que van escriure. Qui va dir la veritat?

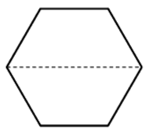


A) Jim B) Pit C) Al D) Tom E) No ho podem saber amb seguretat.

La idea clau va ser que, tal com deia l'enunciat, s'havien aconseguit 30 monedes, i vaig suposar que, encara que alguns havien mentit, tots havien apuntat un total de 30 monedes perquè si no el capità ho veuria de seguida; així vaig poder deduir tot el que hi havien apuntat i mirar quins deien mentides.

Triat per Yihao Liu (Col·legi Sant Lluís, Barcelona)

28. Un hexàgon regular es pot dividir de moltes formes, de manera que totes les peces resultants siguin iguals. Per exemple, en la figura el teniu dividit amb dos trapezis iguals. De quina de les maneres següents no es pot dividir un hexàgon regular?



A) 6 triangles equilàters iguals B) 3 rombes iguals C) 4 trapezis iguals
D) 12 rombes iguals E) 6 rombes iguals

Vaig pensar com si les peces fossin Pattern Blocks i a partir de les equivalències entre peces i d'altres divisions i equivalències vaig poder resoldre'l.

Tercer d'ESO

Triat per Vahe Arsenyan Kobalyan (Col·legi Sant Lluís, Barcelona)

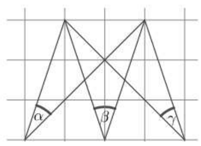
27. La grangera Fina ven ous de gallina i d'ànec. Té els ous en cistelles amb 4, 6, 12, 13, 22 i 29 ous. El seu primer client compra tots els ous d'una cistella. Després d'aquesta venda, la Fina observa que dels ous que li queden, el nombre d'ous de gallina és el doble del nombre d'ous d'ànec. Quants ous ha comprat el client?

A) 29 B) 22 C) 13 D) 12 E) 4

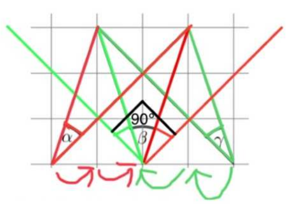
Vaig decidir seleccionar aquest problema, ja que fent una primera lectura semblava llarg de resoldre, però la idea clau va ser pensar que podia fer mòdul 3 i arribar a la solució sense estudiar cas per cas. Si hi ha d'haver el doble d'ous de gallina que d'ànec, el nombre total ha de ser múltiple de 3. Com que al començament n'hi ha 86 (que és múltiple de 3 més 2) també se n'han d'haver tret un múltiple de 3 més 2. Això només ho compleix un dels nombres!

Triat per Gabriel Domínguez Meuleman (St. Paul's School, Barcelona)

28. Els tres angles α, β i γ estan marcats en un paper quadriculat, com es mostra en la figura. Quin és el valor de $\alpha + \beta + \gamma$?



A) 120° B) 75° C) 90° D) 60° E) 70°

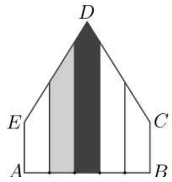


A primera vista és molt difícil calcular cadascun dels angles individualment, així que ha d'haver-hi una idea-clau que ho simplifiqui. L'he buscat fins que l'he trobat. Si moc l'angle γ dues caselles cap a l'esquerra i l'angle α dues caselles cap a la dreta, fent això s'ajunten α, β i γ en un angle delimitat per dues diagonals. D'aquesta manera es veu clarament que sumen 90°

Triat per Yile Liu (Col·legi Sant Lluís, Barcelona)

30. En el pentàgon $ABCDE$, $\widehat{A} = \widehat{B} = 90°$, $AE = BC$ i $ED = DC$. Sobre el segment AB es marquen quatre punts que el divideixen en cinc parts iguals, i es dibuixen perpendiculars sobre cada un d'aquests punts, com es mostra en la figura. La regió negra té una àrea de $13\,\text{cm}^2$, i la regió grisa una àrea de $10\,\text{cm}^2$. Quina és l'àrea, en cm^2, del pentàgon sencer?

A) 60 B) 58 C) 49 D) 47 E) 45



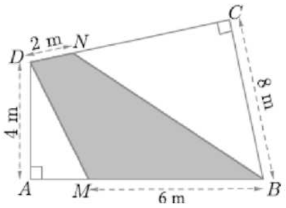
Aquest problema em va agradar perquè considero que va ser el més difícil de la prova i em va suposar un bon repte. Pel que fa a la resolució, en primer lloc, vaig tenir la idea-clau de dividir per la meitat cadascuna de les regions del pentàgon amb un segment perpendicular a la base del pentàgon. Així vaig poder plantejar equacions que relacionen les diferents regions amb una constant x i, així, vaig poder resoldre el problema.

Quart d'ESO

Triat per Anton Meneses Julià (Institut Teresa Pàmies, Barcelona)

15. En el quadrilàter $ABCD$ de la figura, que té els angles A i C rectes, hi ha indicats un punt M en el costat AB, i un punt N en el costat CD, i les distàncies $ND = 2\,\text{m}$, $DA = 4\,\text{m}$, $MB = 6\,\text{m}$, $BC = 8\,\text{m}$. Quina és l'àrea del quadrilàter gris $MBND$?

A) $36\,\text{m}^2$ B) $32\,\text{m}^2$ C) $24\,\text{m}^2$ D) $20\,\text{m}^2$ E) $18\,\text{m}^2$



He triat aquest problema perquè és molt més senzill del que sembla. Per començar, cal dividir el quadrilàter gris mitjançant un segment BD en dos triangles BMD i BND de base coneguda. La idea clau és veure que els segments de longitud coneguda DA i BC, com que tallen perpendicularment la prolongació de les bases i passen pel vèrtex oposat del triangle, són les altures. Coneixent aquestes dades, és fàcil calcular les àrees dels triangles i sumar-les.

Triat per Andrei Vasilev (Aula Escuela Europea, Barcelona)

27. En Josep té n^3 cubs petits i idèntics. Els fa servir per a construir un cub gros, del qual pinta tota la superfície exterior. Si sabem que el nombre de cubs petits amb una sola cara pintada és igual al nombre de cubs petits sense cap cara pintada, quin és el valor de n?

A) 10 B) 8 C) 7 D) 6 E) 4

Ja que em demana un nombre N peculiar, la clau està en pensar en alguna característica individual que tingui algun nombre concret de cares. A més, per resoldre un problema de 3 dimensions es imprescindible visualitzar-ho previament al cap i això és el que més m'agrada.

Triat per Vera Morancho Bargas (Aula Escuela Europea, Barcelona)

28. Quantes xifres té el nombre més petit, el producte de les xifres del qual és igual a $2^{2\,024}$?

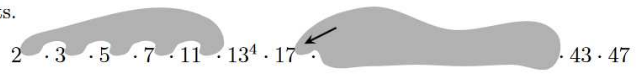
A) 506 B) 674 C) 675 D) 1 012 E) 2 024

Per resoldre aquest problema vaig veure que les xifres només podien ser divisors de 2^{2024}, és a dir: 1, 2, 4 o 8. I com que volia minimitzar el nombre de xifres, volia maximitzar la quantitat de factors 2 que hi havia a cada xifra. Per això, utilitzar vuits era el més òptim. Llavors només em quedava comptar quants en necessitava.

Primer de batxillerat

Triat per Arnau Bulach Masgrau (Institut Joaquima Pla i Farreras, Sant Cugat del Vallès)

21. En la figura es veu la descomposició d'un nombre $N!$ (recordeu que $N! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot N$) com a producte dels seus factors primers ordenats en ordre creixent. La tinta ha cobert uns quants dels factors, així com alguns exponents.



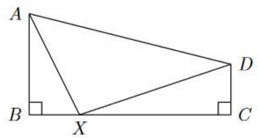
Quin és l'exponent de 17?

A) 2 B) 3 C) 4 D) 5 E) 6

La idea que em va ajudar a trobar la solució és que cada nombre es pot descomponde en factors primers. Sabent quants múltiples de 13 hi ha, i sabent quin és l'últim nombre primer de N, podem saber quants múltiples de 17 hi ha en $N!$.

Triat per Gabriel Mateo Prado Izquierdo (Institut Joan Brossa, Barcelona)

29. Un quadrilàter $ABCD$ té angles rectes als vèrtexs B i C. Es coneixen les longituds de tres dels seus costats que són $|AB| = 4$, $|BC| = 8$ i $|CD| = 2$. Si X és un punt del costat BC, quin és el valor mínim que pot tenir $|AX| + |DX|$?



A) 12 B) $9\sqrt{2}$ C) 13

D) 10 E) Cap dels anteriors

El truc és imaginar-se els segments AX i DX com una sola línia doblegada i pensar que si el que ens demana el problema és la mínima longitud que pot tenir aquella línea quan passa per un punt de la recta BC, és el mateix que imaginar-s'ho com si en comptes del punt D tinguéssim el punt D', simètric de D respecte BC. Aleshores, la mínima distància seria la línia recta entre A i D' i es troba fàcilment aplicant Pitàgores.

Segon de batxillerat

Triat per Jordi Ryhr Mateu (Joan Pelegrí, Barcelona)

22. El Guillem resol l'equació $ax^2 + bx + c = 0$, i la Iolanda resol l'equació $bx^2 + ax + c = 0$, en què a, b i c són nombres enters diferents i cap d'ells és zero. Resulta que les equacions tenen una solució en comú. Quina de les afirmacions següents és certa sempre, independentment dels valors de a, b i c?

A) La solució en comú ha de ser 0.
B) L'equació quadràtica $ax^2 + bx + c = 0$ té exactament una solució real.
C) $a > 0$
D) $b < 0$
E) $a + b + c = 0$

Per resoldre el problema vaig utilitzar la propietat que en un polinomi $ax^2 + bx + c = 0$, les dues arrels x_1 i x_2 compleixen que $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ i que $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$. A partir d'això vaig poder fer un sistema d'equacions que em va permetre veure que la solució en comú de les dues equacions de l'enunciat era $x = 1$ i per tant, $a + b + c = 0$. Va ser un problema que em va semblar molt interessant, i el mètode per trobar la resposta va ser molt satisfactori.

Triat per Pol Rengel Rabassa (Xaloc, L'Hospitalet de Llobregat)

26. Si $2^x = 3$, $2^y = 7$ i $6^z = 7$, quina de les igualtats següents és certa?

A) $z = \frac{y}{x} - 1$ B) $z = \frac{x}{y} + 1$ C) $z = \frac{y}{1+x}$ D) $z = \frac{x}{y-1}$ E) $z = y - \frac{1}{x}$

Aquest problema em va agradar molt perquè, de primeres, treballar amb tres incògnites als exponents semblava força difícil. No obstant, l'exercici era tan fàcil com emprar logaritmes i algunes de les seves propietats, com la de la suma de logaritmes i el canvi de base. Aquest problema ha estat el meu preferit d'aquest any perquè considero que cal que les proves tinguin un bon balanç entre els típics problemes de lògica i d'altres de matemàtica pura.

Triat per Arnau Pino Jacomet (Institut Montilivi, Girona)

28. Una funció $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfà la condició següent per a qualsevol nombre real x:

$$f(20 - x) = f(22 + x).$$

Se sap que l'equació $f(x) = 0$ té exactament dues solucions. Quina és la suma d'aquestes solucions?

A) -1 B) 20 C) 21 D) 22 E) Cap de les anteriors

Vaig raonar que si una de les solucions la podem escriure de la forma $20 - s$ per a una s determinada, ens hem d'adonar que per les condicions de l'enunciat podem veure que el nombre de la forma $22 + s$ també serà solució. Doncs, només queda sumar $(20 - s) + (22 + s)$.

20è concurs de relats Cangur

En el context del vint-i-novè Cangur de la SCM es va convocar la vintena edició del concurs de relats Cangur, de contingut relacionat amb el món de les matemàtiques.

El jurat del concurs va acordar atorgar un únic primer premi, que correspon al relat presentat amb el títol

«La integració, una qüestió de perspectives»

del qual és autora Aitana Pachan Brell, alumna de segon de batxillerat de l'Institut Dertosa, de Tortosa (Baix Ebre).

LA INTEGRACIÓ, UNA QÜESTIÓ DE PERSPECTIVES

N'estic fart. Cada dia m'aixeco amb el pes de saber que el meu destí està determinat, que faci el que faci, mai seré capaç de desfer-me d'aquesta càrrega que arrossego. Potser soc molt egoista. No soc l'únic que pateix d'aquest mal, i encara i així, em queixo com el que més. Podria resignar-me com el meu germà o el meu cosí i acceptar aquesta càrrega durant el que em queda de vida, però no puc. M'hi nego. Tota la vida, he sentit explicar als meus familiars com aquesta característica que ens fa peculiars ha fet que mantinguem un entorn reduït i sempre m'he preguntat per què, per què no fan res per canviar-ho i ho accepten com si la realitat que tenen al davant els agradés. Aquest interrogant m'ha perseguit tota la vida, és com intentar resoldre un problema que no té solució dins del conjunt dels reals.

En un món on tothom té habilitats socials, sentir-se sempre exclòs és molt trist, veritat? Doncs, benvinguts a la meva realitat. Mmm... tècnicament, no és només la meva realitat, perdoneu. A banda de ser un marginat social, també soc bastant exagerat. Molts pensareu, potser, que no tinc amics perquè no ho intento o no m'esforço prou, però la realitat és que tots els meus esforços no serveixen absolutament de res. He intentat resoldre aquest problema tantes vegades, és desesperant. No soc capaç de trobar la solució. Moltes vegades penso que les matemàtiques són cruels i dolentes. Em pregunto per què els matemàtics han creat un món tan injust. Per què tots es poden integrar menys nosaltres?

Malgrat tot, malgrat aquesta incessant sensació de desànim, una part de mi encara somia amb un canvi. Com una flama enmig de l'obscuritat, l'esperança perdura dins meu. Potser és la meva caparruda naturalesa, o simplement una il·lusió que es nega a apagar-se. Recordo quan era jove, abans d'entendre del tot el significat d'aquesta diferència que em marca. Mirava els altres jugar, riure i formar vincles que semblaven innats per a ells. Em preguntava per què jo no podia ser part d'aquella escena, per què jo sempre em quedava a la vora, observant des de lluny sense atrevir-me a acostar-me.

La meva família em consolava, però res no canviava la realitat ineludible. Vaig créixer amb una consciència aguda de la meva pròpia diferència, una ombra que em seguia a tot arreu. Amb els anys, vaig aprendre a enfrontar-me a aquesta realitat amb resignació aparent, tot i que el desig de trobar un lloc on encaixar mai no va marxar del tot.

Ara, en la meva edat adulta, m'adono que la solució a aquest enigma és més complexa del que mai hauria imaginat. Aquesta inquietud constant m'ha portat a reflexionar sobre el significat de la pertinença i l'acceptació. Potser, la resposta no resideix en canviar els altres, sinó en canviar-me a mi mateix. Podria intentar abordar la vida des d'una perspectiva diferent, experimentar noves formes d'interacció i superar les meves pròpies barreres internes. La idea d'un canvi personal comença a fer-se més palpable, com un camí desconegut que s'estén davant meu. És clar, això no serà fàcil. Requereix coratge i determinació per desafiar les meves pròpies limitacions.

Mentre escric aquestes paraules, una nova determinació comença a florir dins meu. No vull passar la resta dels meus dies lamentant-me i preguntant-me sobre el que hauria pogut ser. Potser, podré descobrir una nova manera de viure, una nova manera d'abordar la vida que em permeti sentir-me part del món que fins ara m'ha semblat inaccessible. Així que avui, en lloc de continuar queixant-me de la meva situació, decideixo abraçar aquesta incertesa com una oportunitat. Començo a tramar un pla, petit i modest, per explorar noves connexions, nous interessos i noves maneres de veure les relacions matemàtiques. Potser no trobaré la resposta immediatament, però almenys començo el viatge cap a una nova direcció.

Ara què hi penso, amb tanta reflexió no m'he presentat. Perdoneu. La meva existència es remunta a temps antics, quan els matemàtics van descobrir que la meva representació decimal és infinita i no periòdica, com la de pi. Això significa que mai no podràs trobar un patró repetitiu en els meus dígits decimals, cosa que em fa una mica misteriós i captivador.

La meva importància també es fa evident en el món de les finances i la ciència de la naturalesa. La fórmula e^x, on x és un nombre real, té aplicacions en el càlcul d'interessos compostos, creixement exponencial i altres processos dinàmics. A més, la distribució normal, que és crucial en estadística i teoria de la probabilitat, està estretament relacionada amb mi.

No només soc especial per les meves propietats matemàtiques, sinó també per la meva relació amb altres nombres importants com pi i la unitat imaginària, i. Aquesta relació es manifesta en la identitat d'Euler, una de les fórmules més belles i poderoses de les matemàtiques que relaciona aquests nombres aparentment diferents en una elegant expressió exponencial.

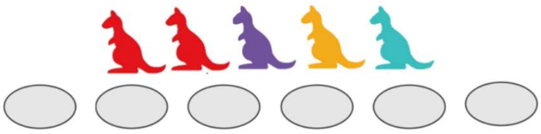
Però totes aquestes qualitats s' emmascaren quan els altres nombres descobreixen la meva relació amb el càlcul diferencial i l'exponencial. Els matemàtics s'han adonat que la meva derivada és igual a mi mateix, el que significa que soc l'única funció amb aquesta propietat. No puc integrar-me, aquesta és la meva càrrega, el meu taló d'Aquil·les.

Espereu, ara que hi penso... aquesta qualitat que sempre he pensat que és un càstig... és fonamental en molts àmbits de la matemàtica i la ciència, com ara el càlcul, les equacions diferencials i la teoria de probabilitats. Tot i que soc un nombre que no pot integrar-se, la meva presència és omnipresent en el món matemàtic i científic. Soc útil per a moltíssimes coses. Jo mateix soc qui il·lustra la bellesa i la profunditat de les connexions entre diferents àrees del coneixement. Pensant-ho millor, potser no puc integrar-me com els altres, però ningú pot negar que la meva existència ha estat clau per realitzar grans descobertes. No seré molt bo integrant-me en el món matemàtic, però, i no és per presumir, he estat un crack a l'hora d'integrar-me en el món humà.

En el Cangur 2024, com a obsequi per a cada concursant que te premi o menció, s'ofereix un joc dissenyat per l'equip del Cangur als Països Baixos, que es coneix com a **w4Kangoeroe**, a partir de *wereldwijde wiskundewedstrijd* (*concurs mundial de matemàtiques*).

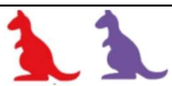
W4Kangoeroe ha tingut el detall, que agraïm de tot cor immensament, d'oferir directament traduïdes al català les instruccions del joc que es presenta amb la denominació de **Cangurs acròbates**,

Els elements del joc són cinc cangurs i sis estores.

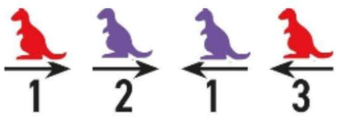


El plantejament és el següent: per a cada una de les actuacions dels cangurs acròbates se sap quantes estores es fan servir, quins cangurs han d'intervenir i quins salts han de fer successivament, un després de l'altre. Però, ai làs!, els cangurs no recorden en quina estora s'ha de posar cadascun per tal que durant l'actuació cada salt acabi en una estora lliure, en la qual no hi hagi cap cangur. L'objectiu del joc és esbrinar-ho!

En el full d'instruccions es plantegen 29 reptes, dels quals tot seguit en comentarem alguns. La solució de cada repte es pot aconseguir a base de successives proves però si oferim el joc en el context del Cangur és perquè si es fa un bon exercici de raonament es pot arribar a la solució de manera ben enginyosa. Vegem un primer repte, amb dos cangurs i quatre estores.

Has de posar aquests dos cangurs 

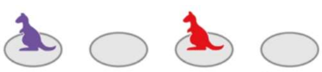
en dues de quatre estores  de manera que es puguin fer successivament els salts



i que cada salt acabi en una estora lliure.

(les fletxes indiquen cap on s'ha de fer el salt i els nombres la longitud del salt prenent com a unitat la distància entre els centres de dues estores)

Segur que hi pot haver molts camins de raonament però en aquest cas pot ser bo començar pel final. Si el darrer salt l'ha de fer el cangur vermell tres estores cap a l'esquerra, on l'ha de començar? Si aquí hi ha arribat després d'un salt d'una estora cap a la dreta, on havia de començar? I una vegada vist això ja podem raonar on ha de començar (o potser millor dit "on no pot començar") el cangur blau perquè pugui fer els dos salts successius sense anar a raure al lloc on serà en aquells moments el cangur vermell.

La solució: 

Podeu comprovar que, efectivament, les posicions després de cada salt compleixen les condicions requerides.

En el full que acompanya el joc els reptes s'anuncien amb la indicació de quantes estores, quins cangurs i quins salts. Per exemple el repte anterior s'indica així:

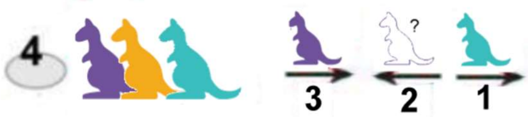
En alguns casos es plantegen reptes en què algun dels cangurs no ha de saltar però, tanmateix, sí que ha d'ocupar la seva estora. Aquest n'és un exemple:

Sabria el lector raonar la solució?

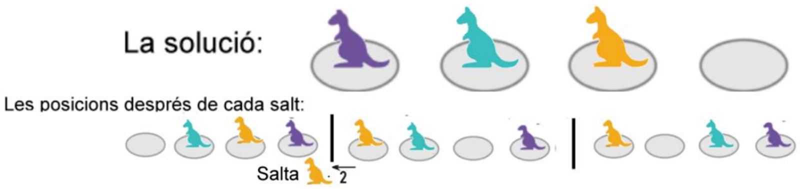
Una altra variant que apareix en els reptes consisteix en què hi ha un salt que no se sap en quin sentit s'ha de fer, si sap a l'esquerra o cap a la dreta i el raonament que es faci ha d'ajudar a decidir-ho. Ànim amb aquest repte en què els dos cangurs vermells han de saltar cadascun una vegada.:

Quan es van analitzant els reptes sorgeixen més novetats.

De vegades apareix un salt que no se sap quin cangur l'ha de fer que s'indica com  (ara en presentem uns casos) o bé que no se sap quantes estores s'han de saltar i aquest aspecte ja el deixem per a les persones interessades en aprofundir el tema i mirar de resoldre tots els reptes que trobaran al joc. Exemple amb "cangur desconegut":



Es podria pensar que de seguida se sap de quin color és el cangur que ha de fer el segon salt. Però no és pas immediat! Ja hem vist exemples que un cangur fa dos salts o que un altre no en fa cap i queda tota l'estona estàtic al seu lloc. Ara bé, o un raonament o l'anàlisi de les possibilitats en aquesta situació, sí que ens permetran deduir que el cangur que ha de fer el segon salt és el que podia semblar a primera vista.

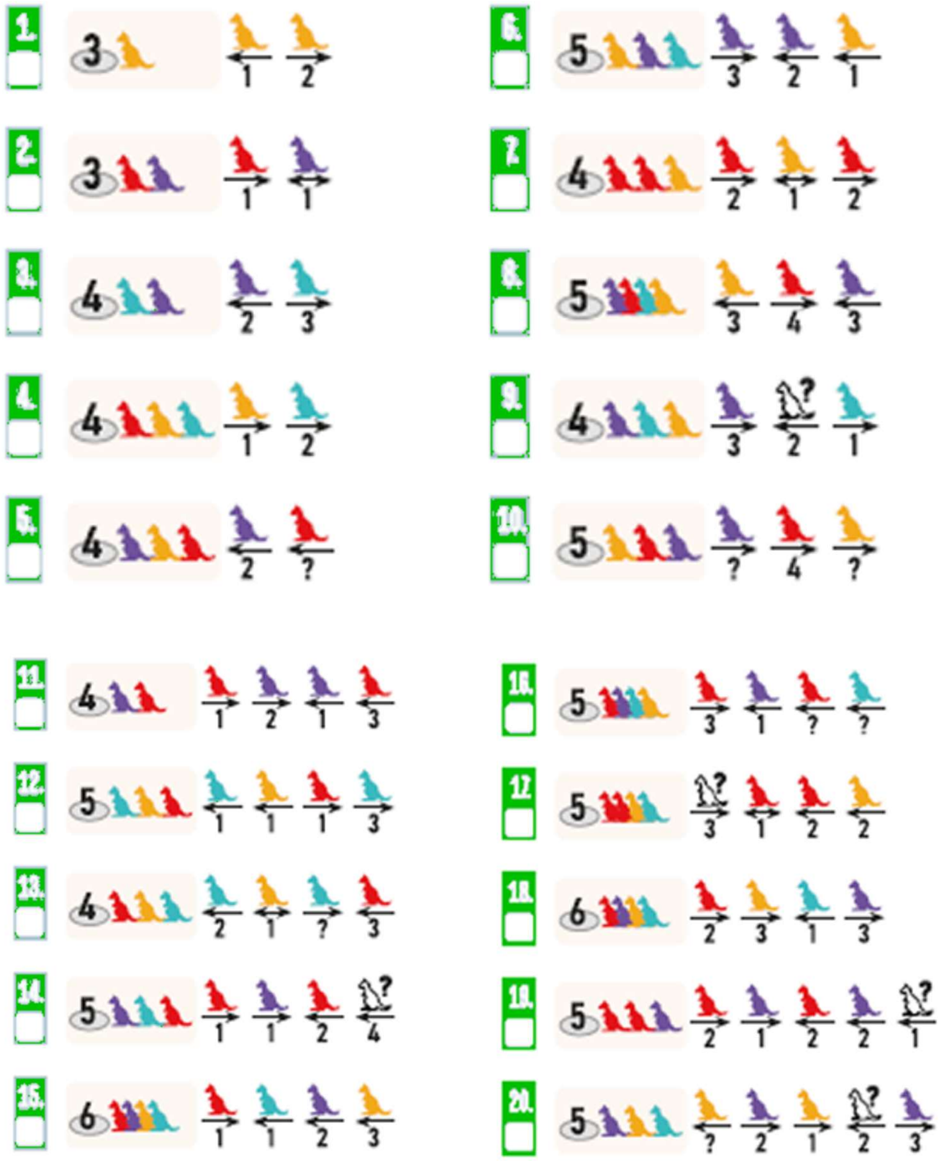


Per acabar aquesta breu introducció al joc dels **Cangurs acròbates** plantegem un altre repte amb "cangur desconegut".

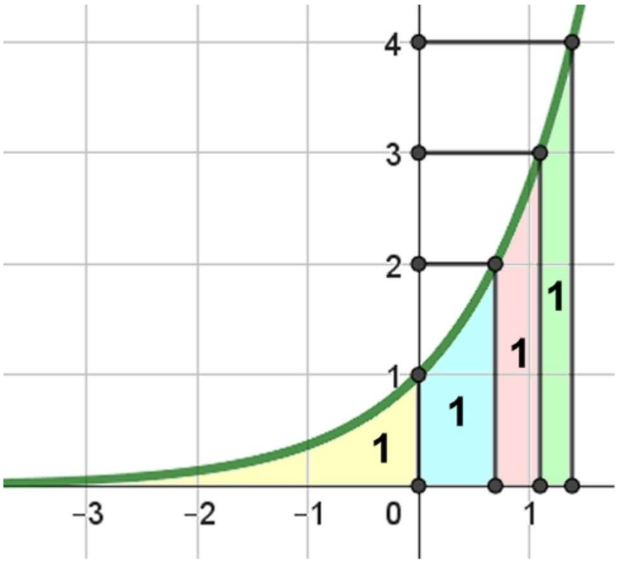
Que aquest joc us ajudi a reforçar la idea que raonar és part fonamental de la tasca matemàtica!

(teniu algunes solucions en aquest enllaç : https://scm.iec.cat/wp-content/uploads/2024/02/solucionari.pdf)

La col·lecció completa dels reptes que es plantegen en la versió del joc repartida a premis i mencions



La solució la pots trobar provant o raonant!



Una reflexió sobre les àrees que determina la funció protagonista del relat
La integració, una qüestió de perspectives

Cangur 2024
Una publicació de la Comissió Cangur
de la Societat Catalana de Matemàtiques.

Edició a cura d'Antoni Gomà. Maig de 2024

Institut d'Estudis Catalans

Generalitat de Catalunya
Departament d'Educació

mmaca

ONCE

APOTEMA

explorium