Problema 1.

Determineu els enters positius n pels quals el nombre n^2+5n+6 és un quadrat perfecte.

Solució.

En primer lloc, observem que

$$a_n = n^2 + 5n + 6 = (n + 2)(n + 3)$$

és el producte de dos enters positius consecutius. Per tant,

$$(n + 2)^2 < (n + 2)(n + 3) < (n + 3)^2$$

i aleshores a_n està comprès estrictament entre dos quadrats perfectes consecutius, i per tant mai podrà ser un quadrat perfecte.

Problema 2.

Fixat un segment $\overline{AB}$, considerem tots els punts X tals que en el triangle AXB el punt mig M del segment $\overline{AX}$ compleix $\widehat{XAB} = \widehat{XBM}$.
Demostreu que tots aquests punts X estan sobre una mateixa circumferència.

Solució 1.

En primer lloc, $\widehat{AXB} = \widehat{MXB}$ perquè M està sobre el segment $\overline{AX}$. Com que també tenim $\widehat{XAB} = \widehat{XBM}$, els triangles ABX i BMX só semblants. Aleshores, pel teorema de Tales,

$$\frac{BX}{MX} = \frac{AB}{BM} = \frac{AX}{BX} = \frac{2MX}{BX},$$

on l'última igualtat ve del fet que $AX = 2MX$ perquè M és el punt mig del segment $\overline{AX}$.
D'aquí deduïm en primer lloc que

$$\frac{BX}{MX} = \frac{2MX}{BX} \Rightarrow BX^2 = 2MX^2 \Rightarrow BX = \sqrt{2}MX,$$

i ara substituint a la primera igualtat,

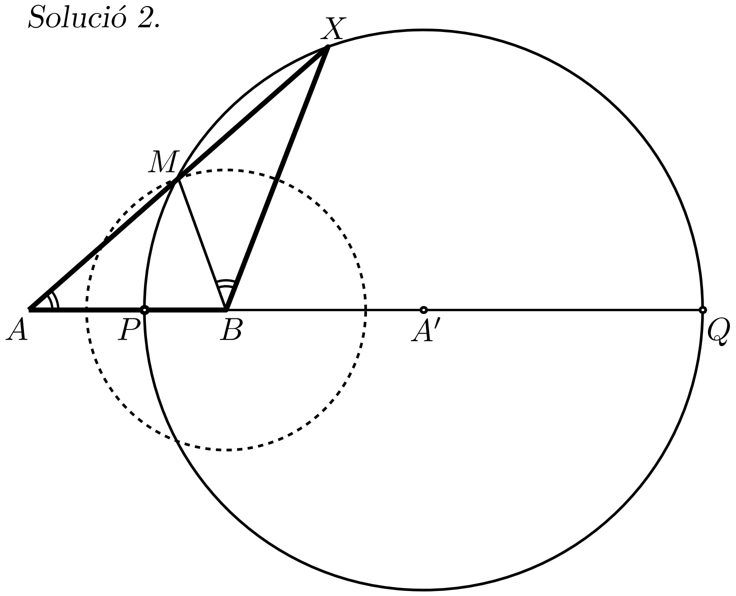
$$\frac{AB}{BM} = \sqrt{2} \Rightarrow BM = \frac{1}{\sqrt{2}}AB.$$

Ara sigui A' el punt simètric d'A respecte de B. És clar que tenim $AA' = 2AB$, i com que $AX = 2AM$ i els triangles AMB i AXA' comparteixen l'angle $\widehat{MAB} = \widehat{XAA'}$, són semblants. Per tant, pel teorema de Tales,

$$\frac{A'X}{AA'} = \frac{BM}{AB} \Rightarrow A'X = 2BM,$$

i recuperant que $BM = AB/\sqrt{2}$ surt $A'X = \sqrt{2}AB$. Per tant, com que tots els punts X estan a la mateixa distància del punt A', estan sobre la circumferència de centre A' i radi $\sqrt{2}AB$.

Solució 2.



Per simplificar la notació posem $d = AB$, $a = XB$, $b = XA$ i $m = BM$. La igualtat dels dos angles marcats fa que les rectes MB i AB siguin antiparal·leles respecte les XA i XB. Per tant, $a^2 = b\dfrac{b}{2}$, d'on $a\sqrt{2} = b$. Si sabem la fórmula de les mitjanes (que s'obté simplement aplicant el teorema del cosinus a cadascun dels triangles XBM i ABM) obtindrem

$$m^2 = \frac{1}{2}(d^2 + a^2 - \frac{b^2}{2})$$

i en el nostre cas $m = \dfrac{d}{\sqrt{2}}$ que és constant. Per tant, el punt M es mou sobre una circumferència de centre B i radi $\dfrac{d}{\sqrt{2}}$. Com que l'homotècia de centre A i raó 2 passa del punt M al punt X, passarà el lloc geomètric de M al lloc geomètric de X, que serà uns circumferència de centre A' i radi $d\sqrt{2}$.

Solució 3.

Amb les mateixes notacions que a la solució anterior i de $b = a\sqrt{2}$ resulta que les distàncies de X a A i a B estan en la relació constant $\sqrt{2}$. El lloc geomètric buscat és la circumferència d'Apol·loni que té per diàmetre els punts P (interior a AB) i Q (exterior a AB) tals que les seves distàncies a A i a B siguin proporcionals, respectivament a $\sqrt{2}$ i 1. (Les bisectrius interior i exterior de l'angle $\widehat{AXB}$ passen per P i Q, respectivament.)

Observació a les tres solucions.

De la circumferència lloc geomètric de X se n'han d'exclore els punt P i Q ja que no produeixen triangles. Que els altres punt de la circumfèrència són del lloc geomètric surt de la reversibilitat de tots els raonaments fets.

Problema 3.

L'Anna i la Berta tenen una tauleta de xocolata de dimensions $n \times m$ (on n i m són enters positius), i juguen al següent joc.

Les jugadores s'alternen els torns, i a cada torn la jugadora a qui li toca fa el següent: decideix com trencar la tauleta en dues parts (de dimensions $(n-k) \times m$ i $k \times m$, amb $k < n$, o bé de dimensions $n \times (m-k)$ i $n \times k$, amb $k < m$, (on k sempre és un enter positiu), i un cop ha fet el tall decideix quina de les dues parts es menja i quina part segueix al joc i passa a l'altra jugadora.

Perd la jugadora que rep una tauleta de dimensions 1×1.

a) Si comença l'Anna, determineu per a quins valors de m i n té una estratègia guanyadora.

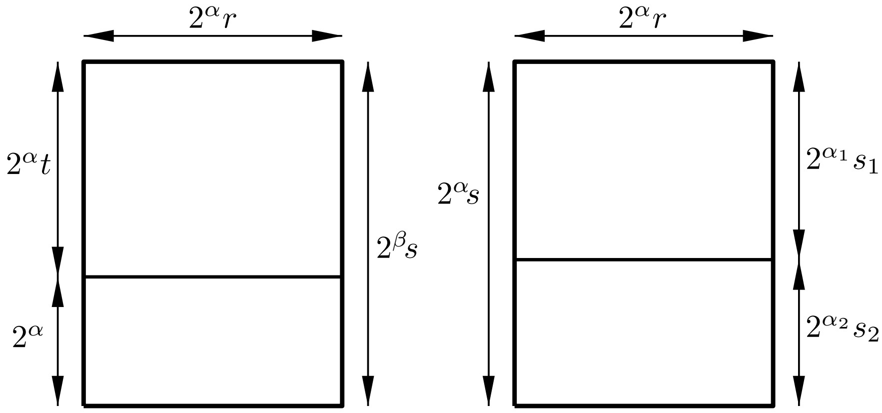
b) Considerem ara una versió alternativa d'aquest joc on a cada torn la jugadora que té la tauleta decideix com trencar-la, però és l'altra jugadora qui tria quina part segueix al joc.

Si comença l'Anna, determineu ara per a quins valors de m i n té una estratègia guanyadora.

Solució.
a) Hi ha dos tipus de tauletes, les quadrades i les rectangulars (no quadrades). Una tauleta rectangular sempre es pot trencar en una quadrada i una altra. Una tauleta quadrada només es pot trencar en dues de rectangulars.

La jugadora que té una tauleta rectangular sempre pot forçar que l'altra sempre la tingui quadrada, i aquesta acabarà perdent.
Per tant, l'Anna té estratègia guanyadora quan $n \neq m$ i la Berta la té si $n = m$.

b) Posem ara $m = 2^\alpha r$ i $n = 2^\beta s$ amb r i s senars. Com abans, hi ha dos tipus de tauletes, les *pseudoquadrades* que compleixen $\alpha = \beta$ i les *pseudorectangulars* que compleixen $\alpha \neq \beta$. Observem que r i s no intervenen en aquesta definició. La clau de la solució s'assembla una mica al cas a).
1) Una tauleta pseudorectangular sempre es pot trencar en **dues** tauletes pseudoquadrades. Si suposem $\beta > \alpha$ la figura de l'esquerra ens indica com fer-ho ja que $t = 2^{\beta-\alpha}s - 1$ és senar i les dues parts són pseudoquadrades.
2) Una tauleta pseudoquadrada no es pot trencar mai en dues pseudoquadrades (figura de la dreta) ja que aleshores seria $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ i per tant $s_1 + s_2 = s$, cosa impossible si s_1, s_2 i s són senars.

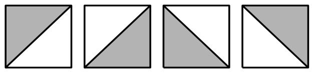


Dit això, resulta que una jugadora que té una tauleta pseudorectangular pot forçar que l'altre la tingui pseudoquadrada (trencant-la en dues pseudoquadrades), però si una jugadora té una tauleta pseudoquadrada no pot impedir que l'altra n'agafi una de pseudorectangular. Qui tingui la primera pseudorectangular guanya el joc.

Problema 4.

Un tauler 2022×2022 s'ha de recobrir completament amb peces que són triangles rectangles isòsceles amb catets de longitud igual a cada casella del tauler (que són totes quadrades). Hi ha triangles blancs i negres. Un recobriment és bo si dos triangles que es toquen per un costat tenen colors diferents. Quants recobriments bons diferents es poden fer d'aquest tauler?

Solució. Una casella pot recobrir-se de 4 maneres diferents.



Dues caselles que només es toquen per un vèrtex es poden recobrir lliurement ja que no comparteixen cap costat. Però els recobriments d'aquestes dues caselles determinen completament el recobriment de les dues veïnes en comú.

Si recobrim de manera independent totes les caselles de la diagonal (ho podem fer perquè només es toquen pels vèrtexs) podem observar que ens queda determinat el recobriment de tot el tauler. Per tant, per a cada possible recobriment de la diagonal existeix un únic recobriment bo del tauler sencer.

Com que la diagonal té 2022 caselles i cada casella es pot recobrir de 4 maneres diferents, tenim 4^{2022} recobriments bons.

Problema 5.

Considerem un polinomi quadràtic $p(x) = ax^2 + bx + c$ amb coeficients reals.
Suposem que per tot nombre natural $N > 0$ existeix un nombre racional r tal que $p(r) = \dfrac{1}{N}$.

a) Demostreu que a, b, c són racionals.

b) Demostreu que, de fet, $a = 0$.

Solució. a) Per cada enter positiu k, denotem r_k el nombre racional tal que $p(r_k) = 1/k$. Aleshores, tenim que els nombres

$$\frac{p(r_1) - p(r_2)}{r_1 - r_2} = a(r_1 + r_2) + b \qquad \text{i} \qquad \frac{p(r_2) - p(r_3)}{r_2 - r_3} = a(r_2 + r_3) + b$$

són racionals. Per tant, la seva diferència és $a(r_1 - r_3)$, que també ha de ser racional. Com que r_1 i r_3 són nombres diferents, això implica que a és racional. Però aleshores per la igualtat anterior tindrem que b també ho ha de ser. Finalment, com que $p(r_1) = ar_1^2 + br_1 + c$ és racional, aleshores també c és racional.

b) Considerem les fraccions irreductibles

$$a = \frac{a_1}{a_2}, \qquad b = \frac{b_1}{b_2}, \qquad c = \frac{c_1}{c_2}.$$

Sigui un nombre primer q que no divideixi cap dels numeradors o denominadors d'aquestes fraccions, i suposem que existeix un nombre racional r tal que $p(r) = 1/q$. Aleshores, si considerem la fracció irreductible $r = n/m$ tindrem que

$$\frac{1}{q} = p(m/n) = \frac{am^2 + bnm + cn^2}{n^2} = \frac{a_1b_2c_2m^2 + b_1a_2c_2nm + c_1a_2b_2n^2}{n^2a_2b_2c_2}.$$

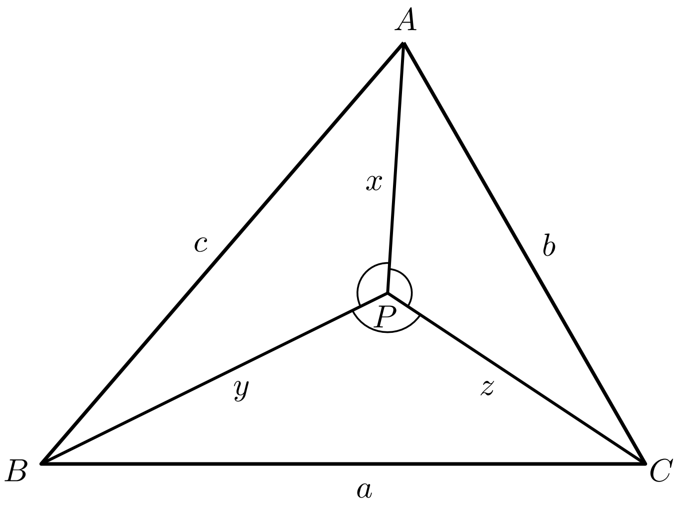
Com que q no divideix $a_2b_2c_2$, aleshores ha de dividir n, i en particular tenim que el denominador és divisible per q^2. Per altra banda, com que $\mathrm{mcd}(m, n) = 1$, aleshores q no divideix m, i per tant no divideix tampoc $a_1b_2c_2m^2$, llevat del cas $a_1 = 0$. Això vol dir que q no divideix al numerador, i en canvi el denominador és múltiple de q^2, cosa que contradiu el fet que la fracció sigui igual a $1/q$.

Problema 6.

Considerem un triangle ABC amb un punt P interior tal que $\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} =$ $= 120°$.
Demostreu que

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} \geq \sqrt{3}\big(\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}\big).$$

Solució.



Farem servir la desigualtat

$$x^2 + y^2 + xy \geq \frac{3}{4}(x+y)^2$$

vàlida per a tots els nombres reals x, y. Es demostra simplement operant i arribant a $x^2+y^2-2xy = (x-y)^2 \geq 0$, on només val la igualtat si $x = y$.
Els tres angles marcats a la figura són de $120°$. Podem aplicar el teorema del cosinus als tres triangles APB, BPC i CPA.
Si tenim present la desigualtat anterior i que $\cos 120° = -1/2$ ens quedarà

$$c^2 = x^2 + y^2 + yx \geq \frac{3}{4}(x+y)^2 \qquad \text{d'on} \qquad c \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$$

Anàlogament, $a \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}(y+z)$ i $b \geq \dfrac{\sqrt{3}}{2}(z+x)$. Sumant les tres desigualtats ens surt $a+b+c \geq \sqrt{3}(x+y+z)$. Notem que només es pot aconseguir la igualtat si $x = y = z$ i per tant si el triangle és equilàter.

Observació. El punt P s'anomena *punt de Fermat* del triangle i és el punt tal que la suma $x + y + z$ de les distàncies de P als tres vèrtexs és mínima. Aquest punt només pot ser interior al triangle si aquest és acutangle, rectangle, o bé obtusangle amb angle obtús inferior a $120°$.