59a Olimpíada Matemàtica
Primera fase (Catalunya)

Primera sessió. 16 de desembre de 2022

Problema 1.

Determineu els enters positius n per als quals el nombre $n^2 + 5n + 6$ és un quadrat perfecte.

Problema 2.

Fixat un segment $\overline{AB}$, considerem tots els punts X amb la propietat que en el triangle AXB el punt mitjà M del segment $\overline{AX}$ compleix $\widehat{XAB} = \widehat{XBM}$.
Demostreu que tots aquests punts X estan sobre una mateixa circumferència.

Problema 3.

L'Anna i la Berta tenen una tauleta de xocolata de dimensions $n \times m$ (on n i m són enters positius), i juguen al joc que s'explica seguidament.

a) Les jugadores s'alternen els torns, i en cada torn la jugadora a qui li toca fa aquestes accions: decideix com trencar la tauleta en dues parts (de dimensions $(n-k) \times m$ i $k \times m$, amb $k < n$, o bé de dimensions $n \times (m-k)$ i $n \times k$, amb $k < m$, (on k sempre és un enter positiu), i un cop ha fet el tall decideix quina de les dues parts es menja i quina part segueix al joc i passa a l'altra jugadora.
Perd la jugadora que rep una tauleta de dimensions 1×1.
Si comença l'Anna, determineu per a quins valors de m i n té una estratègia guanyadora.

b) Considerem ara una versió alternativa d'aquest joc en què, en cada torn, la jugadora que té la tauleta decideix com trencar-la, però és l'altra jugadora qui tria quina part segueix al joc.
Si comença l'Anna, determineu ara per a quins valors de m i n té una estratègia guanyadora.

Segona sessió. 17 de desembre de 2022

Problema 4.

Un tauler de 2022×2022 caselles s'ha de recobrir completament amb peces que són triangles rectangles isòsceles amb catets de longitud igual a cada casella del tauler (que són totes quadrades). Hi ha triangles blancs i triangles negres.
Un recobriment és bo si dos triangles que es toquen per un costat tenen colors diferents. Quants recobriments bons diferents es poden fer d'aquest tauler?

Problema 5.

Considerem un polinomi quadràtic $p(x) = ax^2 + bx + c$ amb coeficients reals. Suposem que per a tot nombre natural $N > 0$ existeix un nombre racional r que compleix $p(r) = \frac{1}{N}$.

a) Demostreu que a, b, c són racionals.

b) Demostreu que, de fet, $a = 0$.

Problema 6.

Considerem un triangle ABC amb un punt interior P que compleix

$$\widehat{APB} = \widehat{BPC} = \widehat{CPA} = 120º.$$

Demostreu que

$$\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} \geq \sqrt{3}\,(\overline{AP} + \overline{BP} + \overline{CP}).$$