Problema 1.

Sigui $\mathcal{P}$ un polígon regular de n costats, $n \geq 6$. Trobeu el nombre de triangles que tenen vèrtexs en els vèrtexs del polígon i costats sobre les diagonals (no costats) de $\mathcal{P}$.

Solució.

El nombre de triangles amb vèrtexs en els vèrtexs del polígon és el mateix que el nombre de maneres d'escollir 3 elements d'entre n elements possibles, i per tant és

$$\binom{n}{3} = \frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2}.$$

Ara hem de restar el nombre de triangles que tenen un costat o dos que coincideixin amb costats del polígon.
Si fixem un costat de $\mathcal{P}$, el nombre de triangles que tenen aquell costat com a propi i les altres dos diagonals internes (no costats) és $n-4$ i, per tant, el nombre total de triangles amb exactament un costat que coincideixi amb el polígon és

$$n(n-4).$$

Finalment, hi ha n triangles tals que dos costats coincideixin amb els del polígon.
El nombre buscat és

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3 \cdot 2} - n(n-4) - n = \frac{n(n-4)(n-5)}{6}.$$

Problema 2.

L'Alba i la Blanca juguen al joc següent. Hi ha dues piles de fitxes, inicialment amb 26 i 25 fitxes respectivament. Les jugadores s'alternen els torns, i a cada torn poden fer un dels moviments següents: treure una fitxa d'una de les piles, o bé treure una fitxa de cada pila, o bé moure una fitxa d'una pila a l'altra. Guanya la jugadora que deixa les dues piles sense fitxes.

Demostreu que la jugadora que comença té una estratègia guanyadora.

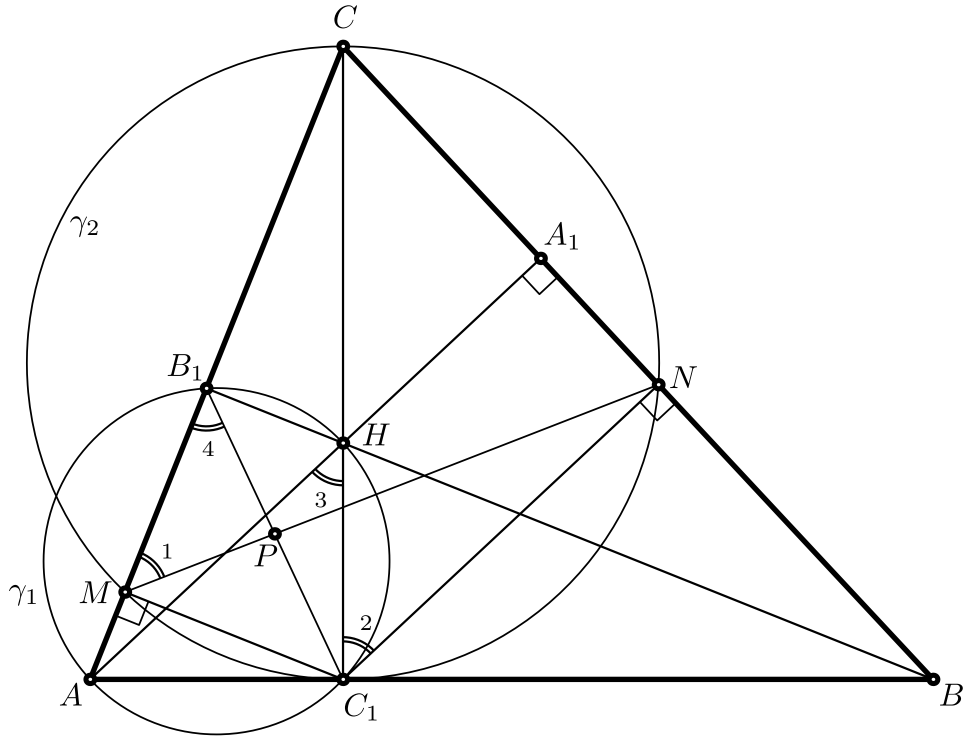
Solució.

Suposem que comença el joc l'Alba (jugadora A). La seva estratègia guanyadora és la següent. En el primer torn treu una fitxa per deixar les piles amb $(26, 24)$ fitxes. A partir d'aleshores, faci el que faci la Berta (jugadora B), la jugadora A pot fer un moviment que deixi sempre un nombre parell de fitxes a cada pila (i amb un nombre total de fitxes inferior). Això vol dir que B sempre haurà de fer la seva jugada amb un nombre parell de fitxes a cada pila i per tant no pot guanyar. En canvi, A sempre arribarà al (0,0), i serà la guanyadora.

Problema 3.

Sigui ABC un triangle acutangle amb altures AA_1, BB_1, CC_1. Siguin M, N les projeccions de C_1 sobre els costats AC i BC, respectivament. Demostreu que el segment MN talla el segment B_1C_1 en el seu punt mig.

Solució.
El segment AH es veu des de B_1 i C_1 sota un angle de $90°$ i per tant els quatre punts A, C_1, H i B_1 són concíclics (circumferència γ_1). Anàlogament, el segment CC_1 es veu des de M i N sota angles rectes i γ_2 passa per C, M, C_1 i N.



Si ens fixem en els quatre angles marcats amb els números 1, 2, 3 i 4, tindrem

$1 = 2$ inscrits a γ_2 i veuen la corda CN

$2 = 3$ les rectes AA_1 i C_1N són paral·leles

$3 = 4$ inscrits a γ_1 i veuen la corda AC_1

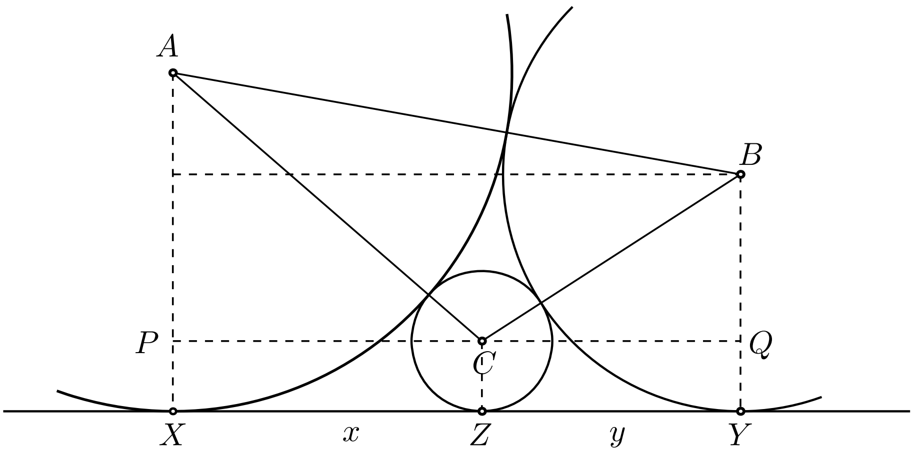
La igualtat dels angles 1 i 4 ens diu que en el triangle rectangle MB_1C_1 el triangle B_1PM és isòsceles i $BP = PM$. Aleshores P està sobre la mediatriu del catet B_1M que és paral·lela al catet MC_1. En conseqüència, P és el punt mitjà del la hipotenusa B_1C_1 (i el circumcentre del triangle MB_1C_1).

Problema 4.

Tres cercles són tangents entre ells dos a dos, i són també tots tres tangents a una mateixa recta. Si denotem per $R_1 \geq R_2 > r$ els radis d'aquests tres cercles, demostreu que

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}.$$

Solució.



El teorema de Pitàgores aplicat als triangles ACP i BCQ ens diu

$$\overline{XZ}^2 + \overline{AP}^2 = \overline{AC}^2, \qquad \overline{YZ}^2 + \overline{BQ}^2 = \overline{BC}^2.$$

Notem que $\overline{AP} = R_1 - r$, $\overline{BQ} = R_2 - r$, $\overline{AC} = R_1 + r$, $\overline{BC} = R_2 + r$, i denotem $x = \overline{XZ}$, $y = \overline{YZ}$. Aleshores, tenim

$$x^2 + (R_1 - r)^2 = (R_1 + r)^2, \qquad y^2 + (R_2 - r)^2 = (R_2 + r)^2.$$

De manera similar, podem tornar a fer servir Pitàgores en el triangle amb hipotenusa AB, i tindrem que

$$(x + y)^2 + (R_1 - R_2)^2 = (R_1 + R_2)^2.$$

Desenvolupant els quadrats, les identitats anteriors ens diuen que

$$x = 2\sqrt{R_1 r}, \qquad y = 2\sqrt{R_2 r}, \qquad x + y = 2\sqrt{R_1 R_2}.$$

Per tant, tindrem

$$\sqrt{R_1 r} + \sqrt{R_2 r} = \sqrt{R_1 R_2},$$

o

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}.$$

Problema 5.

Determineu tots els nombres primers $p \geq 3$ tals que $(p+1)/2$ i $(p^2+1)/2$ són quadrats perfectes.

Solució. Tenim que

$$p + 1 = 2m^2, \qquad p^2 + 1 = 2n^2,$$

per a certs $n, m \geq 2$, $n > m$. Aleshores, tenim que

$$p(p-1) = p^2 - p = 2n^2 - 2m^2 = 2(n+m)(n-m).$$

Com que p és primer, o bé p divideix $n+m$, o bé p divideix $n-m$.
Ara bé, com que $2n^2 = p^2 + 1 < 2p^2$, tenim que $n < p$. Amb un raonament semblant surt $m < p$ i d'aquí que $n - m < p$ i $n + m < 2p$. De $0 < n - m < p$ surt que p no pot dividir $n-m$ i l'única opció és que $n+m = p$. Això a més implica que $p-1 = 2(n-m)$. Per tant, deduïm que

$$n = 3m - 1,$$

i per tant

$$p = 4m - 1.$$

Per altra banda, sabiem que $p = 2m^2 - 1$, i d'aquí surt que $m = 2$. Això implica $p = 7$, i aquest és, en conseqüència, l'únic primer que compleix el que volem:

$$\frac{7+1}{2} = 4, \qquad \frac{7^2+1}{2} = 25.$$

Problema 6.

Volem pintar els nombres 1, 2, . . . , 2021, cadascun de color blau o vermell, de manera que per cada conjunt de nombres consecutius la diferència entre la quantitat de nombres blaus i vermells (així com la diferència entre la quantitat de nombres vermells i blaus) sigui com a molt 2. De quantes maneres ho podem fer?

Solució.
Donem valors 1 i -1 als nombres pintats amb vermell i blau, respectivament, i denotem per x_1, x_2, . . . , x_n els valors (colors) donats als n nombres 1, 2, . . . , n. Posem també

$$a_k = \sum_{i=1}^{k} x_i.$$

L'enunciat ens diu que $-2 \le a_k \le 2$ $(i = 1, \dots, n)$. I com que la suma dels nombres consecutius de $i+1$ a j és

$$x_{i+1} + x_{i+2} + \cdots + x_j = a_j - a_i$$

també haurà de passar que $-2 \le a_j - a_i \le 2$, $(i, j = 1, \dots, n)$.
Aquesta condició obliga que només puguin ocórrer tres casos

Cas 1) Conjunt $\mathcal{C}_1$ de coloracions per a les quals tots els a_i compleixen $0 \le a_i \le 2$ per a tot i entre 1 i n.

Cas 2) Conjunt $\mathcal{C}_2$ de coloracions per a les quals tots els a_i compleixen $-2 \le a_i \le 0$ per a tot i entre 1 i n.

Cas 3) Conjunt $\mathcal{C}_3$ de les altres coloracions, és a dir, les que tenen algun a_i positiu i algun a_j negatiu. En aquest cas cap a_k pot ser 2 ni -2 ja que aleshores alguna diferència $a_k - a_i$ podria ser -4, -3, 3, 4.

Els conjunts $\mathcal{C}_1$ i $\mathcal{C}_2$ són disjunts. També tenim

$$\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3 = \{1, -1, 1, -1, \dots\} \quad \text{i} \quad \mathcal{C}_2 \cap \mathcal{C}_3 = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$$

de manera que el total de coloracions serà

$$T_n = |\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2| + |\mathcal{C}_3| - |\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3| - |\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3| = |\mathcal{C}_1| + |\mathcal{C}_2| + |\mathcal{C}_3| - 2$$

Posem ara $C_n = |\mathcal{C}_1|$ que és funció del nombre d'elements n. És evident que $C_1 = 1$ i que $C_2 = 2$. Volem veure que $C_n = 2C_{n-2}$. En efecte, si $x_1, x_2, \dots, x_{n-2}$ és una coloració de 1, 2, . . . ,$n-2$ volem veure de quantes maneres podem obtenir una coloració de 1, 2, . . . , n segons el valor de a_{n-2}.

$$a_{n-2} = \begin{cases} 0 \begin{cases} x_{n-1} = 1, & x_n = -1 \\ x_{n-1} = 1, & x_n = 1 \end{cases} \\ 1 \begin{cases} x_{n-1} = 1, & x_n = -1 \\ x_{n-1} = -1, & x_n = 1 \end{cases} \\ 2 \begin{cases} x_{n-1} = -1, & x_n = 1 \\ x_{n-1} = -1, & x_n = -1 \end{cases} \end{cases}$$

queda clar que en qualsevol cas sempre s'obtenen dues coloracions.
Les condicions $C_1 = 1$, $C_2 = 2$ i $C_n = C_{n-2}$ donen el valor

$$|\mathcal{C}_1| = C_n = \begin{cases} 2^{n/2} & \text{si } n \text{ és parell} \\ 2^{(n-1)/2} & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$$

El mateix argument es pot aplicar a $|\mathcal{C}_2|$ i s'obté el mateix valor que per a $|\mathcal{C}_1|$.
Posem ara $S_n = |\mathcal{C}_3|$. Tindrem $S_1 = 2$, $S_2 = 2$ i, per un raonament semblant al d'abans, $S_n = 2S_{n-2}$. Es pot veure fàcilment per inducció que $S_n = 2C_{n-1}$. D'aquí resultarà finalment que

$$T_n = 2C_n + 2C_{n-1} - 2 = \begin{cases} 3 \cdot 2^{n/2} & \text{si } n \text{ és parell} \\ 4 \cdot 2^{(n-1)/2} - 2 & \text{si } n \text{ és senar.} \end{cases}$$

En el nostre cas és $n = 2021$ i queda $T_{2021} = 2^{1012} - 2$.