



## 58a Olimpíada Matemàtica



---

---

### Primera sessió. 10 de desembre de 2021

#### Problema 1.

Sigui  $\mathcal{P}$  un polígon regular de  $n$  costats,  $n \geq 6$ . Trobeu el nombre de triangles que tenen vèrtexs en els vèrtexs del polígon i costats sobre les diagonals (no costats) de  $\mathcal{P}$ .

#### Problema 2.

L'Alba i la Blanca juguen al joc següent. Hi ha dues piles de fitxes, inicialment amb 26 i 25 fitxes respectivament. Les jugadores s'alternen els torns, i a cada torn poden fer un dels moviments següents: treure una fitxa d'una de les piles, o bé treure una fitxa de cada pila, o bé moure una fitxa d'una pila a l'altra. Guanya la jugadora que deixa les dues piles sense fitxes.

Demostreu que la jugadora que comença té una estratègia guanyadora.

#### Problema 3.

Sigui  $ABC$  un triangle acutangle amb altures  $AA_1$ ,  $BB_1$ ,  $CC_1$ . Siguin  $M$ ,  $N$  les projeccions de  $C_1$  sobre els costats  $AC$  i  $BC$ , respectivament. Demostreu que el segment  $MN$  talla el segment  $B_1C_1$  en el seu punt mig.

---

---

### Segona sessió. 11 de desembre de 2021

#### Problema 4.

Tres cercles són tangents entre ells dos a dos, i són també tots tres tangents a una mateixa recta. Si denotem per  $R_1 \geq R_2 > r$  els radis d'aquests tres cercles, demostreu que

$$\frac{1}{\sqrt{r}} = \frac{1}{\sqrt{R_1}} + \frac{1}{\sqrt{R_2}}.$$

#### Problema 5.

Determineu tots els nombres primers  $p \geq 3$  tals que  $(p+1)/2$  i  $(p^2+1)/2$  són quadrats perfectes.

#### Problema 6.

Volem pintar els nombres  $1, 2, \dots, 2021$ , cadascun de color blau o vermell, de manera que per cada conjunt de nombres consecutius la diferència entre la quantitat de nombres blaus i vermells (així com la diferència entre la quantitat de nombres vermells i blaus) sigui com a molt 2. De quantes maneres ho podem fer?