**Problema 1.**

*Siguin $a$ i $b$ dos nombres reals tals que* $1010 \leq a, b \leq 2020$. *Demostreu que*

$$(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \leq \frac{9}{2}.$$

*Solució.*

Expandint el costat esquerre, veiem que la desigualtat és equivalent a

$$2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a} \leq \frac{9}{2}.$$

Posant $x = a/b$, aleshores tindrem que $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$, i la desigualtat que volem demostrar és equivalent a

$$x+\frac{1}{x} \leq \frac{5}{2}.$$

Reordenant els termes, això és equivalent a

$$x^2-\frac{5}{2}x+1 \leq 0.$$

Finalment, factoritzant el polinomi quadràtic, veiem que el que volem demostrar és

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x-2) \leq 0,$$

que es compleix ja que $\frac{1}{2} \leq x \leq 2$. La igualtat tindrà lloc si i només si $x = \frac{1}{2}$ o $x = 2$, que correspon als dos casos $(a, b) = (1010, 2020)$ o $(a, b) = (2020, 1010)$.

---

**Problema 2.**

*Tenim una taula $n \times n$ amb $n \geq 2$. Escrivim en aquesta taula els nombres naturals $1, 2, \ldots, n^2$, un en cada casella i en qualsevol ordre. Demostreu que sempre existeixen dues caselles adjacents tals que els nombres $x, y$ que contenen satisfan*

$$|x-y| \geq \frac{n}{2}+1.$$

*(Dues caselles són adjacents si comparteixen un costat.)*

*Solució.*

El nombre més gran i el més petit de la taula són $n^2$ i 1. Considerem una cadena de caselles adjacents

$$1 = a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k = n^2$$

que vagi de la casella que conté l'1 a la que conté $n^2$ i que tingui longitud mínima.
El nombre de *salts* o de *canvis de casella* és $k \leq 2n-2$. Observem que una cadena de longitud mínima només és única si 1 i $n^2$ són a la mateixa fila o a la mateixa columna.

Suposem, per reducció a l'absurd, que tots els nombres $x, y$ escrits en caselles adjacents compleixen $|x-y| < \frac{n}{2}+1$.
Tenim

$$n^2-1 = a_k - a_0 = |a_k - a_0| \le |a_0 - a_1| + |a_1 - a_2| + \ldots + |a_{k-1} - a_k| \qquad (*)$$

Considerem separadament dos casos segons la paritat de $n$.
Cas 1) Suposem $n$ parell. Aleshores $|x-y| < \frac{n}{2}+1$ implica $|x-y| \le \frac{n}{2}$ i de (*) queda

$$n^2-1 \le k\,\frac{n}{2} \le (2n-2)\frac{n}{2} = n^2-n < n^2-1$$

que és absurd.
Cas 2) Suposem $n$ senar. Aleshores $|x-y| < \frac{n}{2}+1$ implica $|x-y| \le \frac{n+1}{2}$ i de (*) queda

$$n^2-1 \le k\,\frac{n+1}{2} \le (2n-2)\frac{n+1}{2} = n^2-1.$$

Aquesta desigualtat obliga que tots els termes de la suma (*) valguin exactament $\dfrac{n+1}{2}$ i que $k = 2n-2$, és a dir, que 1 i $n^2$ estiguin en vèrtexs oposats del tauler (per exemple suposem que 1 sigui al vèrtex superior esquerra). D'aquest 1 en podem sortir anant cap a la dreta o cap avall. Els valors adjacents de l'1 (de valor $a_1$) compliran $|a_1-1| = a_1-1 = \dfrac{n+1}{2}$ o bé $a_1 = \dfrac{n+3}{2}$ i hi haurà dues caselles veïnes de l'1 amb el mateix valor, cosa impossible.

---

**Problema 3.**

*Trobeu totes les parelles d'enters positius $(x, y)$ que són solucions de l'equació*

$$\frac{x^4+y^3}{x^2+y} = x+y.$$

*Solució.* L'equació és equivalent a

$$x^4+y^3 = x^3+y^2+x^2y+xy.$$

Suposem primer que $x \ge 2$ i $y \ge 4$. Aleshores, tenim

$$\frac{x^4+y^3}{2} \ge x^2y^{3/2} \ge 2x^2y,$$

ja que $y^{1/2} \ge 2$. Per tant, tindrem

$$\frac{x^4+y^3}{2} \ge x^2y^{3/2} \ge 2x^2y > x^2y+xy.$$

Per altra banda, tindrem també $x^4 \ge 2x^3$ i $y^3 > 2y^2$, i per tant

$$\frac{x^4+y^3}{2} > x^3+y^2.$$

Sumant les dues desigualtat anteriors, deduïm

$$x^4 + y^3 > x^3 + y^2 + x^2y + xy,$$

sempre que $x \geq 2$ i $y \geq 4$.
Per tant, només ens cal comprovar els casos restants: $x = 1$, o bé $y = 1$, o bé $y = 2$, o bé $y = 3$.

a) Si $x = 1$, aleshores l'equació és

$$y^3 - y^2 - 2y = 0,$$

o bé $y^2 - y - 2 = 0$. Per tant la única solució entera positiva corresponent és $y = 2$.

b) Si $y = 1$, aleshores l'equació és $x^4 - x^3 - x^2 - x = 0$ i per tant $x^3 - x^2 - x - 1 = 0$. Una solució entera positiva $x$, ha de ser divisor de 1 i per tant la única opció seria $x = 1$ que no és solució.

c) Si $y = 2$, aleshores l'equació és

$$x^4 - x^3 - 2x^2 - 2x + 4 = 0.$$

Una solució entera positiva $x$, ha de ser divisor de 4. Es comprova fàcilment que $x = 1$ i $x = 2$ són solucions, mentre que $x = 4$ no ho és.

d) Si $y = 3$, aleshores l'equació és

$$x^4 - x^3 - 3x^2 - 3x + 18 = 0.$$

Una solució entera positiva $x$, ha de ser un divisor de 18. Es comprova fàcilment aleshores que $x = 1$, $x = 2$, $x = 3$, $x = 6$, $x = 9$ i $x = 18$ no són solucions.
Per tant, totes les parelles de solucions són

$$(x, y) = (1, 2) \quad \text{i} \quad (x, y) = (2, 2).$$

---

**Problema 4.**

*Determineu tots els enters positius $n$ tals que la fracció*

$$\frac{8n - 3}{17n - 9}$$

*és irreductible.*

*Solució.* Sigui $p > 1$ un divisor primer comú de $8n - 3$ i $17n - 9$. Aleshores, $p$ també és un divisor del nombre $8(17n - 9) - 17(8n - 3) = 21$. Per tant, o bé $p = 3$, o $p = 7$.

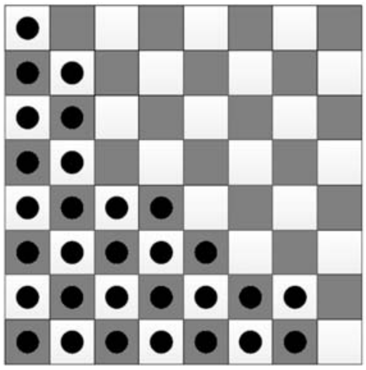
a) $p = 3$. Aleshores, calculant mòdul 3, tenim que $8n - 3 \equiv n$ i $17n - 9 \equiv 2n$. Numerador i denominador seran múltiples de 3 si i només si ho és $n$.

b) $p = 7$. Calculant mòdul 7, $8n - 3 \equiv n - 3$ i $17n - 9 \equiv 3n - 9 \equiv 3(n - 3)$ En aquest cas, numerador i denominador seran múltiples de 7 si i només si ho és $n - 3$.

En resum, la fracció serà irreductible sempre que $n$ no sigui múltiple de 3, ni tampoc sigui de la forma $n = 7k + 3$.

---

**Problema 5.**



*L'Anna i en Bernat juguen a un joc sobre un tauler d'escacs de dimensions* $2020 \times 2020$. *Diem que una col·lecció de peces sobre el tauler està* arraconada *(a la cantonada inferior esquerra) si no hi ha cap casella buida tal que la casella immediatament al damunt o immediatament a la dreta contingui una peça, com es mostra a la figura. Inicialment hi ha* 2020 *peces col·locades en una posició arraconada. En torns alternats, començant per l'Anna, cada jugador retira dues peces en caselles adjacents, amb la condició que la configuració restant segueixi sent arraconada. Perd el jugador que no pot fer cap moviment. Determineu quin dels dos jugadors guanyarà en funció de la posició inicial de les* 2020 *peces, suposant que tots dos juguen òptimament.*

*Solució* La clau del problema està en que la configuració final de les peces no depèn dels moviments que es facin, i per tant el guanyador depèn només de la paritat de moviments que es facin fins arribar a la posició final. Això es deu a dues observacions:

1) Les úniques posicions a partir de les quals no es pot fer cap moviment són els *triangles arraconats* que suposarem que ho estan al vèrtex negre inferior esquerra. Són de la forma $T_m = (m, m-1, \dots, 1)$, $m \geq 0$, on aquests nombres denoten el nombre de peces en cada columna. En efecte, qualsevol altra configuració $(a_1, \dots, a_m)$ té $a_i = a_{i+1} > a_{i+2}$ o bé $a_i \geq a_{i+1} + 2$ per a algun $i$, ja que altrament per a tot $i$, $a_{i+1} = a_i - 1$ i obtenim una configuració de la forma $T_m$. En el primer cas, podem retirar la última peça de les columnes $i, i+1$ obtenint una configuració arraconada. En el segon cas, retirant les dues últimes peces de la columna $i$-èssima també obtenim una configuració arraconada.

2) La diferència $k$ entre el nombre de peces en caselles negres i el de peces en caselles blanques es manté constant al llarg del joc ja que cada parell de peces que es retira cobreix exactament una casella de cada color. Aquest nombre $k$ es manté invariant durant tot el joc. Si inicialment hi ha $n$ peces en caselles negres, aleshores n'hi ha $2020 - n$ en caselles blanques per tant l'invariant és $k = 2n - 2020$.

Amb aquestes dues observacions, sabem que al final del joc la posició serà de la forma $T_m$, i l'invariant $k$ dóna per a cada $T_m$ un nombre diferent: si $m$ és senar, $k = \frac{m+1}{2}$, i si $m$ és parell, $k = -\frac{m}{2}$ (suposant que la casella de la cantonada inferior esquerra està pintada de negre). Per tant, donada la configuració inicial, podem calcular l'invariant $k$, i la posició final $T_m$ vindrà donada per $m = 2k - 1$ si $k > 0$ i $m = -2k$ si $k \leq 0$. Aleshores el nombre final de peces serà $m(m+1)/2 = k(2k-1)$ independentment del signe de $k$. Per tant el nombre de peces retirades és igual a $2020 - k(2k-1) = 2020 - 2k(k-1) + k = 2n - 2k(k-1)$ i el nombre de moviments fins al final del joc és la meitat, $n - k(k-1)$.
Com que $k(k-1)$ sempre és parell, en Bernat guanyarà si i només si es fan un nombre parell de moviments, és a dir, si i només si hi ha un nombre parell de peces en posicions negres a l'inici.

---

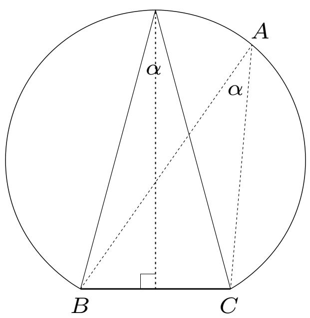
**Problema 6.**

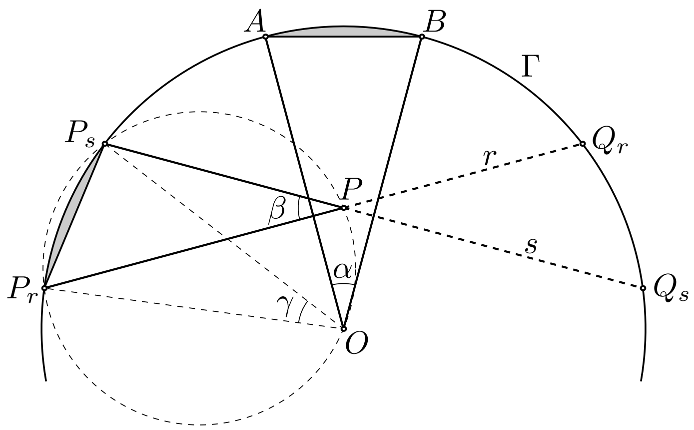
*Sigui $\Gamma$ una circumferència centrada en $O$ i siguin $A$ i $B$ dos punts sobre $\Gamma$. Siguin $C$ i $D$ dos punts en els segments $OA$ i $OB$, respectivament, tals que $OC = OD$. Anomenem $r$ a la recta perpendicular a $OA$ que passa per $C$ i $s$ a la recta perpendicular a $OB$ que passa per $D$. Suposem que l'angle $\widehat{AOB}$ és prou petit com perquè $r$ i $s$ no intersequin l'arc $\widehat{AB}$. En aquest cas, siguin $P_r, Q_r$ i $P_s, Q_s$ les interseccions de $r$ i $s$ amb $\Gamma$, respectivament, de manera que $P_r, P_s, A, B, Q_r$ i $Q_s$ segueixen aquest ordre en $\Gamma$. Demostreu que l'àrea delimitada per $r, s$ i l'arc $\widehat{P_rP_s}$ és menor o igual a la delimitada pels segments $OA, OB$ i l'arc $\widehat{AB}$.*

---

*Solució.*

Sabem que el lloc geomètric dels punts $A$ que veuen un segment $BC$ sota un angle donat $\alpha$ és un arc de cercle *(arc capaç)*. Aquest lloc és també el dels vèrtexs $A$ del triangles que tenen base fixa $BC$ i angle oposat $\alpha$ fix. Tots tenen la mateixa base i, per tant, el d'àrea màxima serà el d'altura màxima, que és el triangle isòsceles (figura de l'esquerra).




La figura de la dreta correpon a l'enunciat del problema. Notem amb $\alpha$ l'angle dels radis $OA$ i $OB$. Les rectes $r$ i $s$, perpendiculars respectivament a $OA$ i $OB$ també formen angle $\alpha$, de manera que $\beta = \alpha$. L'angle $\beta$ és interior al cercle i val la semisuma dels arcs que veu a cada costat

$$\beta = \frac{\widehat{P_rP_s} + \widehat{Q_rQ_s}}{2},$$

però com que per simetria de la figura és $\widehat{P_rP_s} = \widehat{Q_rQ_s}$ queda $\gamma = \widehat{P_rP_s} = \beta = \alpha$. D'aquí es dedueix que els punts $O$, $P$, $P_r$ i $P_s$ són concíclics. També tenim que $\widehat{P_rP_s} = \widehat{AB}$ i que els corresponents segments circulars són igual (marcats en gris a la figura). A més, els triangles $AOB$ i $P_rOP_s$ són congruents i tenen la mateixa àrea. El problema s'acaba observant que l'àrea del triangle $PP_rP_s$ és inferior a la del triangle $OP_rP_s$ pel que s'ha dit al principi.