



LVII OLIMPIADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

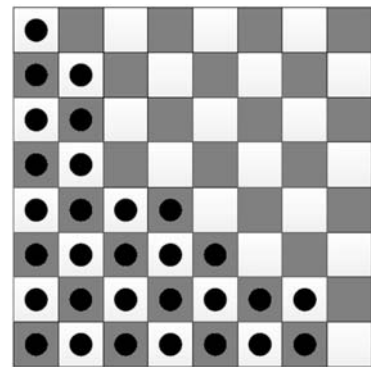
12 de Desembre de 2020, de 9.30 a 13 h.

4. Determineu tots els enters positius n tals que la fracció

$$\frac{8n - 3}{17n - 9}$$

és irreductible.

5. L'Anna i en Bernat juguen a un joc sobre un tauler d'escacs de dimensions 2020×2020 . Diem que una col·lecció de peces sobre el tauler està *arraconada* (a la cantonada inferior esquerra) si no hi ha cap casella buida tal que la casella immediatament al damunt o immediatament a la dreta contingui una peça, com es mostra a la figura. Inicialment hi ha 2020 peces col·locades en una posició arraconada. En torns alternats, començant per l'Anna, cada jugador retira dues peces en caselles adjacents, amb la condició que la configuració restant segueixi sent arraconada. Perd el jugador que no pot fer cap moviment. Determineu quin dels dos jugadors guanyarà en funció de la posició inicial de les 2020 peces, suposant que tots dos juguen òptimament.



6. Sigui Γ una circumferència centrada en O i siguin A i B dos punts sobre Γ . Siguin C i D dos punts en els segments OA i OB , respectivament, tals que $OC = OD$. Anomenem r a la recta perpendicular a OA que passa per C i s a la recta perpendicular a OB que passa per D . Suposem que l'angle \widehat{AOB} és prou petit com perquè r i s no intersequin l'arc \widehat{AB} . En aquest cas, siguin P_r, Q_r i P_s, Q_s les interseccions de r i s amb Γ , respectivament, de manera que P_r, P_s, A, B, Q_r i Q_s segueixen aquest ordre en Γ . Demostreu que l'àrea delimitada per r, s i l'arc $\widehat{P_r P_s}$ és menor o igual a la delimitada pels segments OA, OB i l'arc \widehat{AB} .

No es poden usar calculadores ni altres aparells electrònics.