Olimpíada
Matemàtica
Espanyola

Catalunya

LVI OLIMPÍADA MATEMÀTICA

CATALUNYA

Problemes

Problema 1.

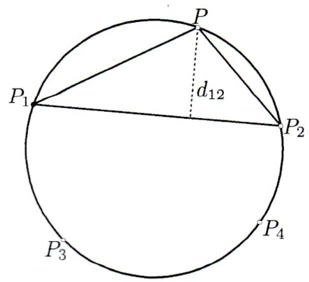
Sigui Γ una circumferència i siguin P, P_1, P_2, P_3, P_4 cinc punts sobre ella. Demostreu que el producte de les distàncies de P a les rectes P_1P_2 i P_3P_4 és igual al producte de les distàncies de P a les rectes P_1P_3 i P_2P_4.

Primera solució.

Sigui d_{12} la distància de P a la recta P_1P_2. De manera similar definim les quantitats d_{34}, d_{13} i d_{24}. Pel teorema del sinus aplicat al triangle PP_1P_2, tenim

$$\frac{\overline{PP_1}}{\sin\widehat{PP_2P_1}} = \frac{\overline{PP_2}}{\sin\widehat{P_2P_1P}} = \frac{\overline{P_1P_2}}{\sin\widehat{P_1PP_2}} = 2R,$$

on R és el radi de Γ, la circumferència circumscrita al triangle PP_1P_2.



Per altra banda, per la definició de sinus, tenim que

$$\sin\widehat{PP_2P_1} = \frac{d_{12}}{\overline{PP_2}}.$$

Ajuntant aquests dos resultats, tenim que

$$d_{12} = \frac{\overline{PP_1}\cdot\overline{PP_2}}{2R},$$

i anàlogament obtenim

$$d_{34} = \frac{\overline{PP_3}\cdot\overline{PP_4}}{2R}, \quad d_{13} = \frac{\overline{PP_1}\cdot\overline{PP_3}}{2R}, \quad d_{24} = \frac{\overline{PP_2}\cdot\overline{PP_4}}{2R}.$$

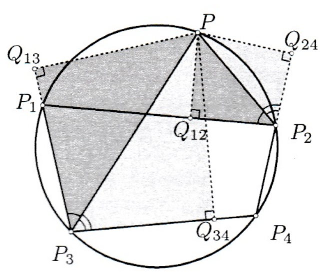
Així doncs,

$$d_{12}d_{34} = \frac{\overline{PP_1}\cdot\overline{PP_2}}{2R}\cdot\frac{\overline{PP_3}\cdot\overline{PP_4}}{2R} = \frac{\overline{PP_1}\cdot\overline{PP_3}}{2R}\cdot\frac{\overline{PP_2}\cdot\overline{PP_4}}{2R} = d_{13}d_{24},$$

com volíem veure.

Segona solució:

Siguin Q_{12}, Q_{13}, Q_{24}, Q_{34} els peus de les perpendiculars traçades des de P a les rectes P_1P_2, P_1P_3, P_2P_4 i P_3P_4, respectivament. Amb les notacions de la primera solució, d_{ij} és la longitud del segment PQ_{ij}.



Els triangles gris fosc són semblants ja que són rectangle i els angles marcats amb un traç són iguals (inscrits que veuen l'arc PP_1). Anàlogament, els triangles foscos també ho són ja que són rectangles i els angles marcats amb dos traços són iguals (el que té vèrtex P_2 és suplementari del $\widehat{PP_2P_4}$ que, a la vegada, és suplementari del $\widehat{PP_3P_4}$). Les relacions de semblança ens diuen

$$\frac{d_{24}}{d_{34}} = \frac{PP_2}{PP_3} \quad \text{i} \quad \frac{d_{12}}{d_{13}} = \frac{PP_2}{PP_3}.$$

Igualant, surt el resultat.

Problema 2.

Sigui $n = 2^k$ un nombre enter positiu. Es diu que un subconjunt A de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ és bescanoní *(natural de Bescanó, Gironès) si compleix que*
1) El nombre 1 pertany a A.
2) Si un nombre x pertany a A, llavors $2x$ no hi pertany.

Es demana:
a) Trobar un conjunt bescanoní amb el màxim nombre d'elements quan $n = 2^5$.
b) Calcular el nombre màxim d'elements que pot tenir un conjunt bescanoní en funció de k.

Solució.

a) Separem els nombres entre 1 i $2^5 = 32$ en diferents subconjunts segons la seva part senar: $\{1, 2, 4, 8, 16, 32\}$, $\{3, 6, 12, 24\}$, $\{5, 10, 20\}$, $\{7, 14, 28\}$, $\{9, 18\}$, $\{11, 22\}$, $\{13, 26\}$, $\{15, 30\}$, $\{17\}$, $\{19\}$, $\{21\}$, $\{23\}$, $\{25\}$, $\{27\}$, $\{29\}$, $\{31\}$.
L'única restricció que tenim és que no podem agafar dos nombres consecutius del mateix subconjunt. Del primer subconjunt podem agafar només tres nombres, ja que si n'agaféssim quatre n'hi hauria dos de consecutius. Del segon, tercer i quart subconjuns en podem agafar dos; i de cada un del altres només en podem agafar un. En total, com a màxim, en podem agafar 21. Per exemple, el conjunt bescanoní

$$\mathcal{A} = \{1, 4, 16, 3, 12, 5, 20, 7, 28, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31\}$$

té 21 elements i no admet cap altre element més. Aquest conjunt no és l'únic bescanoní amb el màxim nombre d'elements.

b) De manera similar a l'apartat anterior organitzem els nombres de 1 a 2^k segons la seva par senar. Per a obtenir un conjunt amb el màxim nombre d'elements podem ferho de la manera següent: 1) Agafar tots els primers elements de cada subconjunt (que són els senars) i n'hi ha 2^{k-1}. 2) Agafar tots els tercers elements de cada subconjunt, si existeixen, que són els múltiples de 4 però no de 8. N'hi ha $2^{k-2} - 2^{k-3} = 2^{k-3}$. 3) Agafar els cinquens elements de cada subconjunt (si existeixen) que són múltiples de 16 però no de 32. N'hi ha $2^{k-4} - 2^{k-5} = 2^{k-5}$. I així successivament.
Si k és senar podem agafar en total

$$2^{k-1} + 2^{k-3} + 2^{k-5} + \cdots + 4 + 1 = \frac{2^{k+1} - 1}{3}.$$

Si k és parell, tenim una fórmula anàloga

$$2^{k-1} + 2^{k-3} + 2^{k-5} + \cdots + 8 + 2 = \frac{2^{k+1} - 2}{3}.$$

Problema 3.

Trobeu els valors del nombre enter positiu n per als quals l'equació

$$x^n + (2 + x)^n + (2 - x)^n = 0$$

té solució entera.

Solució. Si n és parell llavors els tres summands són no negatius i han de ser 0, però no pot ser a la vegada $x = 0$, $2 + x = 0$ i $2 - x = 0$.

Si n és senar, tenim el cas $n = 1$ que dóna $x + 2 + x + 2 - x = 0$, de solució $x = -4$. Com que el polinomi P té els coeficients enters, si té una arrel entera ha de ser un divisor del terme independent. Però $P(0) = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$ i els seus divisors són $\pm 2^t$ amb $0 \leq t \leq n+1$. Els valors que corresponen a $t = 0, 1$, és a dir ± 1 i ± 2, es descarten per càlcul directe ja que $P(1) = 3^n + 2 > 0$, $P(-1) = 3^n > 0$, $P(2) = 4^n + 2^n > 0$ i $P(-2) = 4^n - 2^n > 0$ si $n \geq 1$.
Calculem ara, recordant que n és senar,

$$\begin{aligned} P(\pm 2^t) &= \pm 2^{nt} + (2 \pm 2^t)^n + (2 \mp 2^t)^n = \\ &= \pm 2^{nt} + 2^n(1 \pm 2^{t-1})^n + 2^n(1 \mp 2^{t-1})^n = \\ &= 2^n \left(2^{n(t-1)} + (1 \pm 2^{t-1})^n + (1 \mp 2^{t-1})^n \right). \end{aligned}$$

L'expressió del darrer parèntesi, mòdul 2^{t-1} és 2 i, per tant, no pot ser zero. En conseqüència P no té arrels enteres.

Problema 4. Calculeu la suma següent: $\displaystyle\sum_{0 \leq i < j \leq n} \binom{n}{i}\binom{n}{j}$.

Solució. Posant $x_k = \binom{n}{k}$, $(0 \leq k \leq n)$ a la identitat

$$\left(\sum_{k=0}^{n} x_k \right)^2 = \sum_{k=0}^{n} x_k^2 + 2 \sum_{0 \leq i < j \leq n} x_i x_j,$$

resulta, aïllant, que

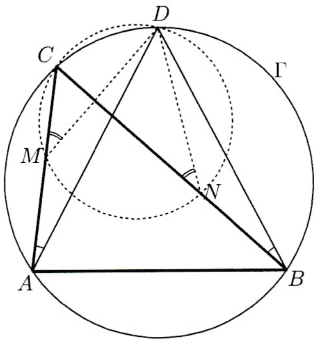
$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} \binom{n}{i}\binom{n}{j} = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \right)^2 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \right) = \frac{1}{2}\left((2^n)^2 - \binom{2n}{n} \right) = \frac{1}{2}\left(4^n - \binom{2n}{n} \right)$$

on s'han utilitzat les conegudes identitats

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n \quad \text{i} \quad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Problema 5.

Sigui Γ la circumferència circumscrita al triangle ABC. Sigui D el punt mitjà de l'arc AB que conté C i sigui M un punt qualsevol del costat AC. El punt N sobre el costat BC és tal que $AM = BN$. Demostreu que el quadrilàter $CDNM$ és cíclic (els vèrtexs estan sobre una circumferència).
Solució.



Com que D és el punt mitjà de l'arc AB ha d'estar sobre la mediatriu del segment AB i, per tant, $AD = BD$. Els dos angles marcats amb un traç són iguals ja que veuen l'arc CD de Γ. Els dos triangles MAD i NBD són iguals ja que tenen dos costats iguals i també l'angle que formen ($MA = NB$ per l'enunciat, $DA = DB$ pel que hem dit abans, i els angles esmentats). Com a conseqüència, els dos angles marcats amb dos traços són iguals, i això obliga que els punts A, B, C i D siguin concíclics.

Problema 6.

Sigui m un nombre enter positiu. Demostreu que el polinomi

$$P(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 3mx + 3m + 1$$

no té zeros enters i calculeu el màxim comú divisor dels nombres $P(m)$ i $P(m) + 3$.

Solució.

En tot el problema estudiarem els valors del polinomi P mòdul 3. Suposem que a és una arrel entera. Aleshores $0 = P(a) = a^5 - a^3 + a^2 - 3ma + 3m + 1$. Si mirem aquesta igualtat mòdul 3 ens surt $0 \equiv a^5 - a^3 + a^2 + 1$. Si $a = 3k$, és a dir, $a \equiv 0$ resulta $0 \equiv 1$ que és absurd mòdul 3. Si $a = 3k + 1$ o bé $a \equiv 1$ resulta $0 \equiv 2$, impossible. I finalment, si $a = 3k + 2$ que és $a \equiv 2 \equiv -1$ resulta $0 \equiv 2$, també absurd. Per tant, P no pot tenir arrels enteres.

Diguem $d = \text{mcd}\big(P(m), P(m) + 3\big)$. Tindrem que $d \big| P(m)$ i $d \big| P(m) + 3$ d'on $d|3$. Només pot ser $d = 1$ o $d = 3$. Però $P(m) = m^5 - m^3 + m^2 - 2m^2 + 3m + 1 = m^3(m^2 - 1) - 2m^2 + 3m + 1 = m^3(m - 1)(m + 1) - 2m^2 + 3m + 1$. A la darrera expressió, els sumands primer i tercer són múltiples de 3 (el primer és producte de tres nombres consecutius). Per tant, calculant mòdul 3, queda $P(m) \equiv -2m^2 + 1 \equiv m^2 + 1$. Però els quadrats mòdul 3 només poden ser 0 i 1 i, per tant, $m^1 + 1$ només pot ser, mòdul 3, o bé 1 o bé 2. En conseqüència, $P(m)$ no pot ser múltiple de 3 i només pot ser $d = 1$.

SOCIETAT CATALANA DE MATEMÀTIQUES · I·E·C·