LVI OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

13 de Desembre de 2019, de 16 a 19.30 h.

1. Sigui Γ una circumferència i siguin P, P_1, P_2, P_3, P_4 cinc punts sobre ella. Demostreu que el producte de les distàncies de P a les rectes P_1P_2 i P_3P_4 és igual al producte de les distàncies de P a les rectes P_1P_3 i P_2P_4.

2. Sigui $n = 2^k$ un nombre enter positiu. Es diu que un subconjunt A de $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$ és *bescanoní* si compleix que
1) El nombre 1 pertany a A.
2) Si un nombre x pertany a A, llavors $2x$ no hi pertany.

Es demana:
a) Trobar un conjunt bescanoní amb el màxim nombre d'elements quan $n = 2^5$.
b) Calcular el nombre màxim d'elements que pot tenir un conjunt bescanoní en funció de k.

3. Trobeu els valors del nombre enter positiu n per als quals l'equació

$$x^n + (2 + x)^n + (2 - x)^n = 0$$

té solució entera.

No es poden usar calculadores ni altres aparells electrònics.

LVI OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

14 de Desembre de 2019, de 9.30 a 13 h.

4. Calculeu la suma següent:

$$\sum_{0\leq i<j\leq n} \binom{n}{i}\binom{n}{j}.$$

5. Sigui Γ la circumferència circumscrita al triangle ABC. Sigui D el punt mitjà de l'arc AB que conté C i sigui M un punt qualsevol del costat AC. El punt N sobre el costat BC és tal que $AM = BN$. Demostreu que el quadrilàter $CDNM$ és cíclic (els vèrtexs estan sobre una circumferència).

6. Sigui m un nombre enter positiu. Demostreu que el polinomi

$$P(x) = x^5 - x^3 + x^2 - 3mx + 3m + 1$$

no té zeros enters i calculeu el màxim comú divisor dels nombres $P(m)$ i $P(m) + 3$.

No es poden usar calculadores ni altres aparells electrònics.