LII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

11 i 12 de desembre de 2015

Enunciats

LII OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Primera sessió

11 de desembre de 2015, de 16 a 19.30 h.

1.–Direm que un nombre natural és *ascendent* si les seves xifres, escrit en base 10, compleixen, vistes d'esquerra a dreta, que cadascuna és més gran o igual que l'anterior i la més significativa no és zero.

Quants nombres ascendents de tres xifres hi ha? I de cinc xifres? I de k xifres?

2.–Es considera el polinomi $P(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - 2x + 1$. Determineu els valors del nombre real a per als quals $P(x) \geq 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Determineu també els valors de a per als quals $(x-1)^3$ divideix el polinomi $P(x) - P(2-x)$.

3.–Siguin a, b, c les longituds dels costats d'un triangle ABC i m_a, m_b, m_c les longituds de les seves mitjanes. Proveu que

$$\frac{2^{m_a} + 2^{m_b} + 2^{m_c}}{2^a + 2^b + 2^c} < 1.$$

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics

L OLIMPÍADA MATEMÀTICA

Primera fase (Catalunya)

Segona sessió

12 de desembre de 2015, de 9.30 a 13 h.

4.–Es tenen 11 boles numerades cadascuna d'elles amb un número enter positiu. Per a cada conjunt $\mathcal{A}$ de tres boles hi ha un subconjunt $\mathcal{B}$ de tres boles, escollides entre les 8 restants, tals que $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = b_1b_2b_3$, on a_i i b_j són els núumeros de les boles de $\mathcal{A}$ i de $\mathcal{B}$, respectivament. Proveu que almenys una bola està numerada amb el 3.

5.–En una circumferència de centre O i radi 2 fixem un radi OA i construïm una semicircumferència que el tingui per diàmetre. Per un punt C del segment OA tracem una perpendicular a OA que talla en D la circumferència inicial i en E la semicircumferència.

Calculeu la longitud del camí recorregut pel punt M, centre de la circumferència circumscrita al triangle AED, quan C recorre el segment OA.

6.–Siguin $x > y > z > t$ quatre enters positius tals que

$$\left(x^2 - y^2\right) + (xz - yt) - \left(z^2 - t^2\right) = 0$$

Proveu que el nombre $xy + zt$ és compost.

No es pot fer ús de calculadores ni d'altres aparells electrònics

Solucions

Problema 1.

Direm que un nombre natural és ascendent *si les seves xifres, escrit en base 10, compleixen, vistes d'esquerra a dreta, que cadascuna és més gran o igual que l'anterior i la més significativa no és zero.*
Quants nombres ascendents de tres xifres hi ha? I de cinc xifres? I de k xifres?

Solució.

Sigui el nombre ascendent de k xifres $a_k a_{k-1} \dots a_1$. Serà

$$1 \leq a_k \leq \cdots \leq a_1 \leq 9.$$

La quantitat de tals nombres és, ras i curt, el nombre de combinacions amb repetició de 9 elements agafats de k en k, és a dir,

$$\binom{9+k-1}{k}.$$

El cas $k = 3$ es pot comptar cas per cas $(111, 112, \cdots, 119, 122, \cdots, 129$, etc) i dóna 165. El cas $k = 5$ ja no es pot comptar directament.
Podem demostrar la fórmula de les combinacions amb repetició fent la transformació que a cada vector $a_k, \dots, a_1$, amb $1 \leq a_k \leq \cdots \leq a_1 \leq 9$
li fa correspondre un altre $b_k, \dots, b_1$, així: $b_k = a_k$, $b_{k-1} = a_{k-1} + 1$, etc, $b_1 = a_1 + k - 1$. El vector $b_k, \dots, b_1$, compleix ara $1 \leq b_k < b_{k-1} < \cdots < b_1 \leq 9 + k - 1$ i la correspondència

$$a_k, \dots, a_1, \quad \longleftrightarrow \quad b_k, \dots, b_1$$

és bijectiva. Per tant, hi ha tantes combinacions amb repetició de 9 elements agafats de k en k com combinacions ordinàries de $9 + k - 1$ elements agafats de k en k, i d'aquí la fórmula. Hi ha altres maneres de demostrar la mateixa fórmula, com per exemple, en el problema de les *pizzes*.

Problema 2.

Es considera el polinomi $P(x) = x^4 - 2x^3 + ax^2 - 2x + 1$. Determineu els valors del nombre real a per als quals $P(x) \geq 0$ per a tot $x \in \mathbb{R}$. Determineu també els valors de a per als quals $(x-1)^3$ divideix el polinomi $P(x) - P(2-x)$.

Solució.

El polinomi $P(x)$ és *recíproc, autorecíproc* o *palindròmic*, es a dir, els coeficients de posicions simètriques respecte els extrems són iguals. Recordem que aquests polinomis, si són de grau parell, permeten reduir el càlcul de les arrels a les d'un polinomi de grau meitat per mitjà del canvi $t = x + 1/x$.
Tenim la identitat

$$P(x) = (x^2+1)(x-1)^2 + (a-2)x^2$$

que podem intuir i demostrar de diverses maneres. En posem dues.

a) Si agrupem els termes *simètrics*, tal com es fa per a resoldre'ls, queda

$$P(x) = (x^4+1) - 2(x^3+x) + ax = \big((x^2+1)^2 - 2x^2\big) - 2x(x^2+1) + ax^2 =$$
$$= (x^2+1)(x^2+1-2x) + ax^2 - 2x^2$$

d'on surt la identitat indicada.

b) Observem que $P(1) = a-2$, de manera que si $a = 2$, el polinomi té l'arrel 1. Separem el coeficient de x^2 en dues parts, una d'elles amb un 2 i l'altra amb coeficient $a-2$. Ens queda

$$P(x) = \big(x^4 - 2x^3 + 2x^2 - 2x + 1\big) + (a-2)x^2 = (x-1)^2(x^2+1) + (a-2)x^2.$$

Com que la primera té l'arrel 1 doble, fàcilment trobem la seva descomposició.

La identitat anterior ens diu que si $a \geq 2$, el polinomi és sempre positiu. A més, $P(1) = a-2$, que és negatiu si $a < 2$.

Així, doncs, la resposta a la primera part és $a \geq 2$.

La segona part també la podem resoldre de dues maneres.

a) Com que $P(x) = (x-1)^2(x^2+1) + (a-2)x^2$, calculant surt

$$P(2-x) = (x-1)^2(x^2-4x+5) + (a-2)(2-x)^2$$
$$P(x) - P(2-x) = (x-1)^2(4x-4) + (a-2)(4x-4) = 4(x-1)^3 + 4(a-2)(x-1).$$

Per tal que $P(x) - P(2-x)$ sigui divisible per $(x-1)^3$ és necessari i suficient que $a = 2$.

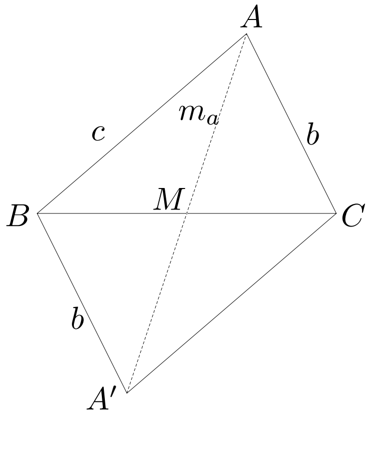
b) Si sabem derivar, posem $F(x) = P(x) - P(2-x)$ i volem que $F(1) = 0$, $F'(1) = 0$ i $F''(1) = 0$. Tenim $F'(x) = P'(x) + P'(2-x)$ i $F''(x) = P''(x) - P''(2-x)$. Les condicions $F(1) = 0$ i $F''(1) = 0$ es compleixen sempre. Però $F'(1) = 0$ és equivalent a $P'(1) = 0$ i això dóna, trivialment, $a = 2$.

Problema 3.

Siguin a, b, c les longituds dels costats d'un triangle ABC i m_a, m_b, m_c les longituds de les seves mitjanes. Proveu que

$$\frac{2^{m_a} + 2^{m_b} + 2^{m_c}}{2^a + 2^b + 2^c} < 1.$$

Solució.



Si M és el punt mitjà de BC i fem el simètric A' de A respecte de M, obtenim el paral·lelògram $ACA'B$. La diagonal AA' té longitud $2m_a$ i la desigualtat triangular ens diu que $2m_a < b + c$, amb desigualtat estricta.

Per veure la desigualtat farem servir el creixement de la funció 2^x i la desigualtat entre mitjanes aritmètica i geomètrica. Tenim

$$2^a + 2^b \geq 2\sqrt{2^a\,2^b} = 2\sqrt{2^{a+b}} > 2\sqrt{2^{2m_c}} = 2\,2^{m_c}.$$

Sumant cíclicament i dividint per dos, queda la desigualtat desitjada (estricta).

Problema 4.

Es tenen 11 boles numerades cadascuna d'elles amb un nombre enter positiu. Per a cada subconjunt $\mathcal{A}$ de tres boles hi ha un subconjunt $\mathcal{B}$ de tres boles, escollides entre les 8 restants, tals que $a_1a_2 + a_2a_3 + a_3a_1 = b_1b_2b_3$, on a_i i b_j són els nombres de les boles de $\mathcal{A}$ i de $\mathcal{B}$, respectivament. Proveu que almenys una bola està numerada amb el 3.

Solució.

Si totes les boles estan numerades amb el 3, es compleix l'enunciat.

Siguin $c_1, c_2, ..., c_{11}$ els números de les boles, que podem suposar $c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_{11}$. Mirem les tres primeres. Segons l'enunciat, existeixen tres enters diferents $p, m, n \geq 4$ tals que $c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 = c_pc_mc_n$. Aleshores

$$c_4c_5c_6 \leq c_pc_mc_n = c_1c_2 + c_2c_3 + c_3c_1 \leq 3c_4c_5,$$

la qual cosa implica $c_6 \leq 3$. D'altra banda, mirant les tres últimes, existeixen $x, y, z \leq 8$ tals que $c_9c_{10} + c_{10}c_{11} + c_{11}c_9 = c_xc_yc_z$. Aquesta desigualtat es converteix en

$$c_6c_7c_8 \geq c_xc_yc_z = c_9c_{10} + c_{10}c_{11} + c_{11}c_9 \geq 3c_7c_8$$

d'on $c_6 \geq 3$. Finalment obtenim que $c_6 = 3$.

Problema 5.

En una circumferència de centre O i radi 2 fixem un radi OA i construïm una semicircumferència que el tingui per diàmetre. Per un punt C del segment OA tracem una perpendicular a OA que talla en D la circumferència inicial i en E la semicircumferència. Calculeu la longitud del camí recorregut pel punt M centre de la circumferència circumscrita al triangle AED quan C recorre el segment OA.

Solució.

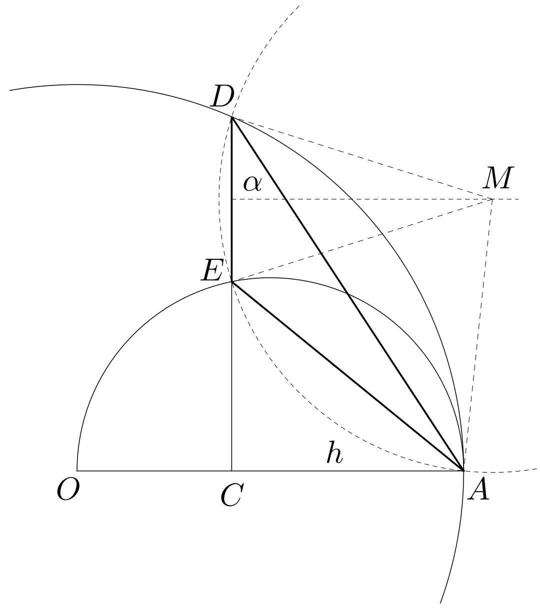
Posem $h = CA$. Sigui pel teorema de l'altura aplicat al triangle rectangle OEA, sigui per càlcul de la potència del punt E respecte de la circumferència de diàmetre OA, obtenim $EC^2 = h(2-h) = 2h - h^2$. Si fem el mateix amb la circumferència gran, ens quedarà $DC^2 = h(4-h) = 4h - h^2$. El teorema de Pitàgores aplicat als triangles ECA i DCA ens dóna els valors $DA = \sqrt{4h}$ i $EA = \sqrt{2h}$. El sinus de l'angle α és

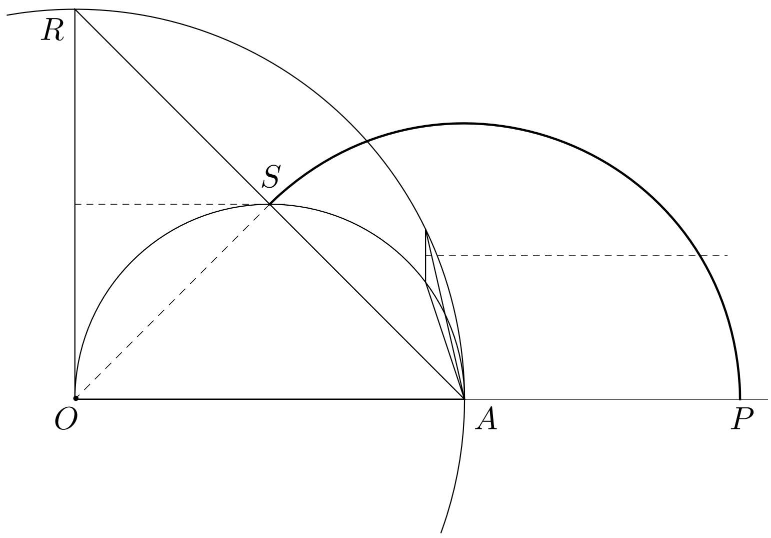
$$\sin\alpha = \frac{DC}{DA} = \frac{h}{\sqrt{4h}}.$$

El teorema dels sinus aplicat al triangle DEA dóna

$$2R = \frac{EA}{\sin\alpha} = 2\sqrt{2}.$$

En conseqüència, el punt M està a distància $\sqrt{2}$ del punt A, amb indepèndencia de la posició de C. El lloc geomètric buscat ha de ser un arc de cercle de centre A i radi $\sqrt{2}$. El lloc geomètric està representat a la figura de sota. Si el punt C arriba a O el triangle esdevé OAR i el circumcentre és S. Si el punt C tendeix a A, els punts D i E tendeixen a A, la mediatriu de DE tendeix a la recta AC i M tendeix a P. Observem també que donat un punt qualsevol de l'arc lloc geomètric, podem fer-lo centre d'una circumferència de radi $\sqrt{2}$. Tallarà les dues circumferències inicials en punts respectius D i E tals que la recta DE és perpendicular a OP.





El lloc geomètric buscat és, exactament, l'arc de circumferència de centre A, de radi $\sqrt{2}$, i que va del punt S al punt P. La seva longitud és $3\sqrt{2}\pi/4$.

Problema 6.

Siguin $x > y > z > t$ quatre enters positius tals que

$$(x^2 - y^2) + (xz - yt) - (z^2 - t^2) = 0.$$

Proveu que l'enter $xy + zt$ és compost.

Solució.

Hi ha nombres enters que compleixen la igualtat de l'enunciat, com per exemple, 17,16,15 i 7. Procedirem per reducció a l'absurd. És a dir, existeixen $x > y > z > t > 0$

tals que $x^2+xz-z^2=y^2+yt-t^2$ i $p=xy+zt$ és primer. Subtituint $x=\dfrac{p-zt}{y}$ en l'expressió $x^2+xz-z^2=y^2+yt-t^2$, obtenim

$$\left(\frac{p-zt}{y}\right)^2+\left(\frac{p-zt}{y}\right)z-z^2=y^2+yt-t^2$$

i reordenant termes, resulta

$$p(p-2zt+yz)=(y^2+z^2)(y^2+yt-t^2)$$

Com que p és primer, p divideix y^2+z^2 o divideix y^2+yt-t^2.

a) Si $p\,|\,y^2+z^2$, llavors $0<y^2+z^2<2xy<2(xy+zt)=2p$ i això implica que $y^2+z^2=p=xy+zt$. D'aquí resulta que $y\,|\,z(z-t)$. Com que $xy+zt$ és primer, aleshores $\gcd(y,z)=1$, i per tant, $p\,|\,(z-t)$. Això no és possible ja que $0<z-t<z<y$.

b)Si $p\,|\,y^2+yt-t^2$, aleshores $0<y^2+yt-t^2<2(xy+zt)=2p$ i això implica que $y^2+yt-t^2=p$. És a dir, $xy+zt=y^2+yt-t^2=x^2-xz-z^2$. D'aquí deduïm que $x\,|\,z(z+t)$ i $y\,|\,t(z+t)$. Com que $\gcd(xy,zt)=1$, és $x\,|\,(z+t)$ e $y\,|\,(z+t)$. Com que $0<z+t<2x$ i $0<z+t<2y$, resulta $z+t=x$ i $z+t=y$, que és impossible.

Les contradiccions anteriors ens porten a concloure que $xy+zt$ és compost.