Distribució límit dels exponents espectrals de Hodge per singularitats de corbes planes

Roger Gómez López

En el camp de la geometria algebraica local, ens centrem en el problema d'entendre singularitats aïllades d'hipersuperfícies complexes, definides per una equació analítica $f \in \mathbb{C}\{x_0, \ldots, x_n\}$ a un entorn de l'origen. En aquest treball estudiem la distribució d'un conjunt d'invariants numèrics de f, els exponents espectrals de Hodge, pel cas particular de singularitats de corbes planes irreductibles.

Els exponents espectrals de Hodge $\alpha_1 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_\mu$ són un conjunt de μ nombres racionals a l'interval $(0, n+1) \subset \mathbb{R}$, on μ és el nombre de Milnor i $\mathbb{C}^{n+1}$ és l'espai ambient de la hipersuperfície. Aquest conjunt és simètric respecte a $\frac{n+1}{2}$ i es preserva per deformacions (de la hipersuperfície) amb nombre de Milnor constant. La definició dels exponents espectrals de Hodge es basa en la construcció de Steenbrink d'una estructura de Hodge mixta sobre la cohomologia de la fibra de Milnor. A més, estan relacionats amb altres invariants importants de singularitats, com per exemple els nombres de salt, que coincideixen amb els exponents espectrals de Hodge a l'interval $[0, 1)$, i en el cas de corbes planes tots dos conjunts donen la mateixa informació de la singularitat. Un altre invariant relacionat és el gènere geomètric, que satisfà la relació $p_g = \#\{i | \alpha_i \leqslant 1\}$.

Kyoji Saito va introduir la funció característica $\chi_f(T)$ com l'espectre de Hodge normalitzat, o equivalentment com la transformada de Fourier de la distribució (discreta) d'exponents espectrals de Hodge $D_f(s)$. Al calcular la funció característica es va adonar que, per a algunes successions d'hipersuperfícies, la distribució d'exponents espectrals de Hodge convergeix a una certa distribució contínua $N_{n+1}(s)$, que només depèn de la dimensió. Arran d'això, K. Saito va formular dues preguntes principals:

- Per a quines successions d'hipersuperfícies convergeix la distribució d'exponents espectrals de Hodge cap a $N_{n+1}(s)$?
- Per a quins valors de $r \in \left(0, \frac{n+1}{2}\right) \subset \mathbb{R}$ dona la funció de distribució acumulada de $N_{n+1}(s)$ fins a r una fita superior de a la funció de distribució acumulada de $D_f(s)$ fins a r?

L'objectiu principal d'aquest treball és trobar respostes parcials a les preguntes de K. Saito. Treballem en el cas de corbes planes irreductibles, al qual tenim la fórmula explícita de Morihiko Saito pels exponents espectrals de Hodge, i equivalentment per a la funció característica. Per a entendre millor el problema, aprofundim en com la transformada de Fourier relaciona diversos conceptes que apareixen a l'article de K. Saito.

En quant a la pregunta sobre la convergència de la distribució d'exponents espectrals de Hodge, K. Saito va donat un resultat per a corbes planes irreductibles amb un límit molt concret en funció de l'últim parell de Puiseux de la corba. En aquest treball calculem límits de la distribució més generals respecte els parells de Puiseux. En conseqüència, veiem que per alguns límits la distribució $D_f(s)$ no convergeix a $N_2(s)$ sinó a altres distribucions.

Respecte la pregunta sobre les funcions de distribució acumulada, demostrem una fórmula tancada per a $\phi_f(r)$, definida com la diferència entre les funcions de distribució acumulada de $N_2(s)$ i $D_f(s)$. Aquesta nova eina ens permet donar una demostració alternativa per a una versió restringida d'un resultat de Tomari que estableix que $\#\left\{i \middle| \alpha_i \leqslant \frac{1}{2}\right\} < \frac{\mu}{8}$. A més, ens proporciona una manera de fitar $\phi_f(r)$ i per tant obtenir intervals de valors r on $\phi_f(r)$ és positiva (o negativa).

De fet, també gràcies a aquesta fórmula tancada per $\phi_f(r)$, som capaços de calcular límits de la distribució d'exponents espectrals de Hodge amb un procediment diferent. D'aquesta manera demostrem teoremes més generals sobre per quins límits la distribució convergeix a $N_2(s)$, principalment en funció del log-canonical threshold $\mathrm{lct}(f)$.