

Jet transport per a mètodes Generals Lineals

La matèria principal d'aquesta tesi és presentar la família d'integradors numèrics coneguda com a mètodes Generals Lineals i la tècnica computacional anomenada jet transport, amb el propòsit de discutir com aquesta última pot ser combinada amb la primera.

En el primer capítol, es presenten els mètodes Generals Lineals (GLM), usats per a la integració numèrica de problemes de valor inicial (PVI). Aquests, són una generalització natural dels reconeguts mètodes Multipas Lineals (LMM) i Runge-Kutta (RK) i, per tant, fan ús tant de la informació de diversos passos previs com de diverses etapes (computacions addicionals per pas). Al llarg del capítol, s'estudia de forma paral·lela per a les tres famílies (i.e., LMM, RK i GLM) les propietats de l'error local, ordre, convergència, estabilitat, consistència i la teoria d'estabilitat lineal, i atès que els GLM generalitzen els LMM i RK, es mostra que aquestes propietats per als LMM i RK són un cas particular de la dels GLM.

En el segon capítol, es presenta la tècnica computacional coneguda com a jet transport. Aquesta resulta de gran utilitat per a resoldre numèricament les equacions variacionals (EVs); és a dir, les equacions diferencials lineals que satisfan les derivades (de qualsevol ordre, respecte a la condició inicial) de la solució d'un problema de valor inicial (PVI). Aquesta tècnica es basa en la diferenciació automàtica; és a dir, a través de l'observació que el jet (conjunt de derivades) d'una funció multivariada es codifica en la seva expansió de Taylor i, per tant, es poden calcular derivades d'ordre arbitrari d'una funció en un punt fent servir l'aritmètica de sèries de potències truncades, la qual pot ser implementada fàcilment en un ordinador. En aquest context, el jet transport és aplicar l'aritmètica de sèries de potències truncades a un integrador numèric per tal d'obtenir la solució de les equacions variacionals.

Un cop introduïts els dos temes principals, la resta del segon capítol és dedicada a presentar les nostres dues contribucions. Primer, demostrarem que la integració numèrica mitjançant un GLM d'un problema de valor inicial fent servir jet transport de qualsevol ordre és equivalent a la integració numèrica a través del mateix GLM de les equacions variacionals del mateix ordre. En segon lloc, derivem les expressions que els coeficients dels jets han de satisfer per a ser solució d'un sistema implícit. El primer teorema implica que, en realitzar la integració numèrica d'un problema de valor inicial mitjançant un GLM substituint l'aritmètica de números per una de sèries de potències truncades, s'obté juntament amb la solució del PVI, les derivades (fins a l'ordre de truncació de les sèries de potències) respecte a la condició inicial d'aquestes solucions. El segon teorema permet aplicar aquesta tècnica amb mètodes Generals Lineals implícits; és a dir, aquells que tenen el pas d'integració definit implícitament, els quals resulten de vital importància per a resoldre els reputats problemes "stiff".

El tercer capítol culmina el projecte discutint la implementació i les aplicacions del contingut desenvolupat en els capítols previs. Primer, donada la complexitat de la implementació dels GLM, ens limitem a presentar una implementació eficient dels mètodes de Runge-Kutta (explícits i implícits) amb jet transport. Finalment, per a exemplificar les seves aplicacions, aquesta implementació és emprada per a calcular l'expansió en sèrie de potències de l'aplicació de Poincaré de l'òrbita periòdica del problema de van der Pol. Cal remarcar que, el jet transport és el que permet obtenir els coeficients de la sèrie de potències i la possibilitat d'utilitzar un integrador implícit és el que permet integrar el problema de van der Pol per als valors del paràmetre per al qual és stiff.

Autor: Philip Pita Forrier. **Directors:** Àngel Jorba i Joan Gimeno.