COMPTANT SUBGRUPS UTILITZANT AUTÒMATS DE STALLINGS I GENERALITZACIONS

PALOMA LÓPEZ LARIOS

El principal objecte d'estudi d'aquest treball és la família dels grups lliure per lliure-abelians. Els grups d'aquesta família són el producte directe d'un grup lliure, $\mathbb{F}_n$, i un grup lliure-abelià, $\mathbb{Z}^m$. És a dir, són isomorfs a $\mathbb{F}_n \times \mathbb{Z}^m$, amb n i m nombres naturals. Si bé això podria fer pensar que aquests grups no són més que una simple combinació dels seus factors, en realitat trobem que presenten propietats diferents de les que exhibeixen $\mathbb{F}_n$ i $\mathbb{Z}^m$. Per exemple, malgrat que els seus dos factors són Howson (la intersecció de dos subgrups finitament generats en $\mathbb{F}_n$ i $\mathbb{Z}^m$ és de nou finitament generada), els grups lliure per lliure-abelians no satisfan aquesta propietat. Comportaments inesperats com aquest han generat interès en l'estudi d'aquesta família, que ha estat al focus de diversos articles de recerca en els darrers anys.

L'objectiu d'aquest treball és doble: d'una banda, oferim una exposició detallada d'una teoria desenvolupada recentment que estén la teoria clàssica dels autòmats de Stallings per a l'estudi dels subgrups de grups lliure per lliure-abelians; i, per altra banda, apliquem aquesta teoria per obtenir una fórmula que doni el nombre de subgrups d'un índex donat a $\mathbb{F}_n \times \mathbb{Z}^m$. Com a pas previ a l'obtenció d'aquesta nova fórmula, considerem abans el problema en cadascun dels factors (lliure i lliure-abelià) separadament.

En el cas lliure-abelià, és possible obtenir una fórmula recursiva per al nombre de subgrups d'un índex donat a $\mathbb{Z}^m$ aplicant tècniques similars a les de l'àlgebra lineal. Essencialment, el que es fa és establir una bijecció entre els subgrups d'índex k de $\mathbb{Z}^m$ i cert tipus de matrius amb coeficients enters i determinant igual a k. Usant un argument recursiu per comptar aquestes matrius, s'obté la fórmula desitjada. En el cas del grup lliure, la corresponent fórmula va ser obtinguda a l'any 1949 per M. Hall. En aquest treball, revisitem el resultat de Hall fent ús de la celebrada teoria dels autòmats de Stallings, que també expliquem en el treball.

L'any 1983, Stallings va establir les bases per a l'estudi dels subgrups del grup lliure a partir d'una representació gràfica d'aquests mitjançant un cert tipus de grafs dirigits i etiquetats que ara coneixem com a autòmats de Stallings. En aquesta representació gràfica, els elements del subgrup es corresponen amb les etiquetes de certs camins tancats als autòmats de Stallings. La clau de la teoria és obtenir una bijecció entre subgrups del grup lliure i autòmats de Stallings, que és computable quan ens restringim a subgrups finitament generats. La potència de la teoria dels autòmats de Stallings queda reflectida en el fet que les seves tècniques han permès resoldre per al grup lliure molts dels problemes algorísmics que solen plantejar-se en el context de la teoria de grups (per exemple, el problema de l'índex finit, el problema de la intersecció o el problema de la pertinença).

La teoria clàssica dels autòmats de Stallings ha estat estesa recentment a l'estudi dels subgrups de grups lliure per lliure-abelians. En aquest cas, es pot establir una bijecció entre subgrups de $\mathbb{F}_n \times \mathbb{Z}^m$ i cert tipus d'autòmats enriquits amb etiquetes abelianes que codifiquen la informació corresponent a la part abeliana d'aquests grups. El treball inclou tots els detalls sobre com arribar a aquesta bijecció. Finalment, utilitzant aquesta bijecció, donem una caracterització geomètrica dels subgrups d'un índex donat a $\mathbb{F}_n \times \mathbb{Z}^m$. Combinant aquesta caracterització amb les fórmules existents per als casos lliure i lliure-abelià, obtenim una nova fórmula que proporciona el nombre de subgrups d'un índex donat a $\mathbb{F}_n \times \mathbb{Z}^m$.